



应用随机过程

吴卫星， 军

外经济贸易大学

金融学院

1/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



三章： 随机过程 基本概念与 a 型

- 随机过程 背景和基本概念
- 有限维分布与Kolmogorov n
- 随机过程 基本a 型
- 过程

2/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.1 随机过程 背景

在许多实际问题中，不仅需要随机现象做时间上的一次观察，且需要做连续不断的观察，以观察研究对象随时间推移演变过程。

~ **3.1.1** 某股票价格？行 T 年连续，记录

$$\{X_t; 0 \leq t \leq T\};$$

~ **3.1.2** 从杂乱讯号 $\{Y(t); 0 < t < T\}$ 中，研究是否存在某种随机信号 $S(t)$.

~ **3.1.3** 监听器上某人谈话记录 $\{Z(t);$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



~ 3.1.4 某种细菌群体 个 \hat{e} 在 $(t; t + \Delta t)$ 内只能增加, 增加 \hat{e} 量与 t 时刻 细菌 $\hat{e} \propto x(t)$, 且 $x_0 = x(0) > 0$.

Proof 确定性下模型: t 时刻 细菌 \hat{e} 为 $x(t)$, 有

$$\Delta x(t) = x(t) \Delta t; \Delta t > 0:$$

$t \rightarrow 0$, 可得:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t):$$

) Φ 值连续 \hat{e}

$$x(t) = x(0) \exp(\lambda t):$$

随机下模型: t 时刻 t 细菌 \hat{e} 为随机变量 $X(t)$,



$(t; t + \Delta t)$ 内增加 1 个个体与 t 有 而 t 无 , 在 $X(t) = x$ 条件下, $X(t + \Delta t) = x + 1$ 的概率为

$$P(X(t + \Delta t) = x + 1 | X(t) = x) = \lambda x \Delta t + o(\Delta t):$$

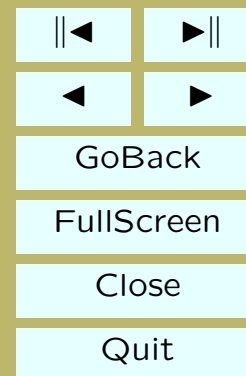
又 $(t; t + \Delta t)$ 内增加 0 于两个个体 概率为 $o(\Delta t)$. 根据全概率公式可得 :

$$P(X(t + \Delta t) = x) = (1 - \lambda x \Delta t)P(X(t) = x) + (\lambda(x - 1) \Delta t)P(X(t) = x - 1) + o(\Delta t):$$

• 后 :

$$P(X(t) = x) = C_{x-1}^{x-x_0} \exp(-\lambda x_0 t) (1 - \exp(-\lambda t))^{x-x_0}; \quad x \geq x_0:$$

注 1 (1) 与确定性 (\emptyset 同处在 时刻 t 未给 N 确切个体 , 给 t 时刻 概率分布: $P(X(t) = x)$.





(2) 对任意 $t \in T$, $X(t)$ 是 Ω 上的随机变量

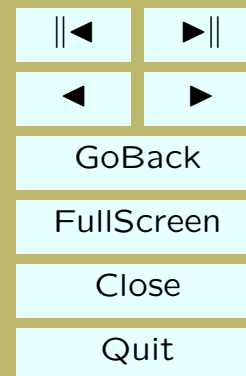
§3.2 基本概念

定义 3.2.1 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, X 是 Ω 上的随机变量, $\{X(t); t \in T\}$ 是 Ω 上的随机过程, 其中 $t \in T$, T 为 \mathbb{R} 的子集.

注:

- 当 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 时称为随机序列或时间序列.
- 随机过程 $\{X(t; \omega); t \in T; \omega \in \Omega\}$ 是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数.

定义 3.2.2 用 $E \subseteq \mathbb{R}$ 表示随机过程 X 的值域, E 为 \mathbb{R}





G态空间.

~ 3.2.3 $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ 应于抛p匀硬1 概率空

间:

$$= \{\omega_1; \omega_2\}; \{\omega_1\} = \{head\}; \{\omega_2\} = \{tail\};$$

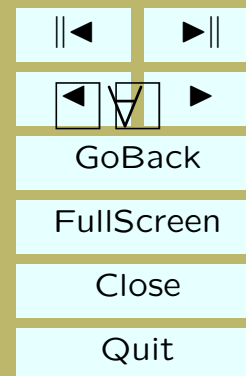
%oN次抛硬1 立 \hat{A} , \hat{U} 入随机C量($\omega = (\omega_1; \dots; \omega_t; \dots; \omega_N)$)

$$X(t; \omega) = \begin{cases} 0; & \omega_t = \omega_1 \\ 1; & \omega_t = \omega_2 \end{cases}$$

则 $X(t)$ ~ 随机 \mathcal{S} . 其 \hat{e} \hat{e} 集 $T = \{0; 1; 2; \dots\}$, G态空
间 $E = \{0; 1\}$.

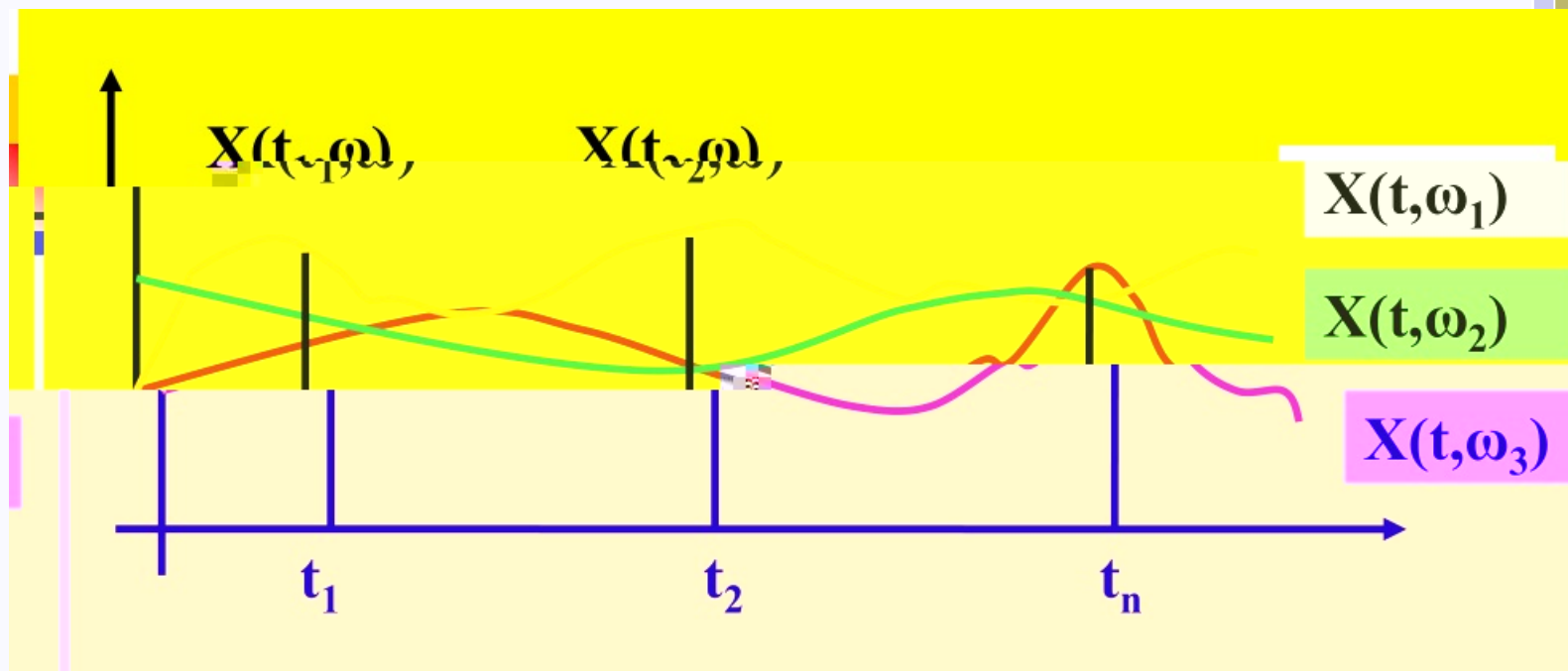
义 3.2.4 随机 \mathcal{S} 理) $i T \times E = \{(t; \omega) :$

$t \in T; \omega \in E\}$ \square



随机 S 可看 α \hat{A} 在积集 $T \times \hat{e}$ 上 二元 \hat{e} .

- $t \in T, X_t(!) = X(t;!)$ \sim 个随机 C 量.
- $!, \check{S}$ 为 $t \in T$ \hat{e} , $X(t;!)$ \sim 个 \hat{A} 在 T 上 普通 Φ 值 \hat{e}





义 3.2.5 每 $\omega \in \Omega$, $\{X_t(\omega); t \in T\}$ 随机游动的一个实现 Φ

3.2.6 利用抛硬币 \tilde{N} 个随机游动的实现 Φ

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\omega t); & \tilde{N} \text{ 现正面} \\ 2t; & \tilde{N} \text{ 现反面} \end{cases}$$

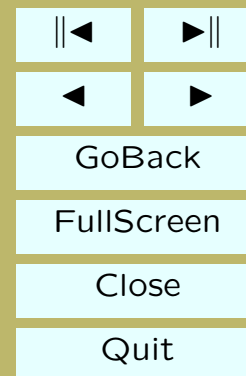
\tilde{N} 现正反面 概率相同, 写 $\tilde{N} X(t)$ 所有实现 Φ .

Proof 记:

$$\omega_1 = \{\tilde{N} \text{ 现正面}\}; \quad \omega_2 = \{\tilde{N} \text{ 现反面}\};$$

则 $X(t)$ 所有实现 Φ 为

$$X(\omega_1; t) = \cos(\omega t); \quad X(\omega_2; t) = 2t;$$





随机过程 分类a:

- (1) $X(t)$ 表示系 在时刻 t 所处 状 .
- (2) $X(t)$ 所有可能状 构成 集合为状 空间, 记为 S .
- (3) 依照状 空间可分为 \ddot{e} 续状 和 I 散状 ;
- (4) 依照参数集, 可分为 I 散参数过程和 \ddot{e} 续参数过程.

注: — 如果不作说明 认为状 空间是实数集 \mathbb{R} 或 \mathbb{R}^f 集.



GoBack

FullScreen

Close

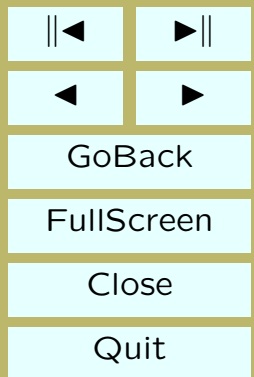
Quit



~ 3.2.7 (随机游) 一 $\pm \in$ 在路上行 r ，以 V 率 p 前进一步，以 V 率 $1 - p$ 后退一步 (假 其步 \cdot 相同) . 以 $X(t)$ 记他在路上 位置，则 $X(t)$ 就 直线上 随机游 .

~ 3.2.8 (Brown运) 英 植物学家Brown 5 $\dot{}$ 飘浮在一面上 微小粒 $f \in \mathbb{R}^2$? 行无 则 运 , 这种运 后来 $\dot{}$ 为Brown运 . 它 分 f 大量随机碰 E (. 若 记 $(X(t); Y(t))$ 为粒 f 在平面 $\langle l \rangle$ 上 位置，则它 平面上 Brown运 .

~ 3.2.9 (排 模型) 客来 服务站 \pm 求服务. 服务站中 服务员 忙碌, 即服务员 在为 \circ 客服务之, 来 客 $\circ \pm$ 排 . 客 来 每个 客 所需 服务之间 随机 , 所 \pm 如 用 $X(t) \ll t \dot{}$ 刻 \cdot , 用 $Y(t) \ll t \dot{}$ 刻 来 客所需 待之间,





则 $\{X(t); t \in T\}; \{Y(t); t \in T\}$ 为随机过程.

§3.3 有限维分布与Kolmogorov 条件

定义 3.3.1 随机过程 $X = \{X(t); t \in T\}$, $t \in T$,

$$F(t; x) := P(X(t) < x); \quad x \in R$$

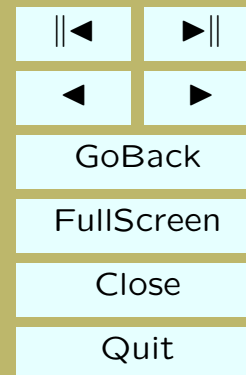
为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数, F 为 X 的一维分布函数.

任 $s; t \in R$, 二维随机过程 $(X(s); X(t))$ 的联合分布函数

$$F(s; t; x; y) := P(X(s) < x; X(t) < y):$$

F 为随机过程 X 的二维分布函数

定义 3.3.2 任 s 有有限个 $t_1; \dots; t_n \in T$, F_n 随机





§ n 维分布 $F_{t_1; \dots; t_n}(x_1; \dots; x_n)$:

$$F_{t_1; \dots; t_n}(x_1; \dots; x_n) = P(X(t_1) < x_1; \dots; X(t_n) < x_n):$$

随机 § 所有 n 维分 \mathcal{U} , 二维分 \mathcal{U} , \dots ; n 维分 \mathcal{U}
全体

$$\{F_{t_1; \dots; t_n}(x_1; \dots; x_n); t_1; \dots; t_n \in T; n \geq 1\}$$

$\{X(t); t \in T\}$ 有限分布族.

5: 知 了随机 § 有限维分布就知 了 $\{X(t); t \in T\}$ 中任意 $n \neq$ 随机变量 联 分布. 也就掌握了这些随机变量之间 相互依赖 系.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



分布x 性质:

(1) i 性

$(1; 2; \dots; n)$ 任一序列 $(j_1; j_2; \dots; j_n)$, 有

$$\begin{aligned} & F_{t_{j_1}; \dots; t_{j_n}}(x_{j_1}; \dots; x_{j_n}) \\ &= P(X(t_{j_1}) < x_{j_1}; \dots; X(t_{j_n}) < x_{j_n}) \\ &= P(X(t_1) < x_{t_1}; \dots; X(t_n) < x_{t_n}) \\ &= F_{t_1; \dots; t_n}(x_1; \dots; x_n): \end{aligned}$$

(2) 相容性

于 $m < n$, 有

$$F_{t_1; \dots; t_m; t_{m+1}; \dots; t_n}(x_1; \dots; x_m; \infty; \dots; \infty) = F_{t_1; \dots; t_m}(x_1; \dots; x_m):$$

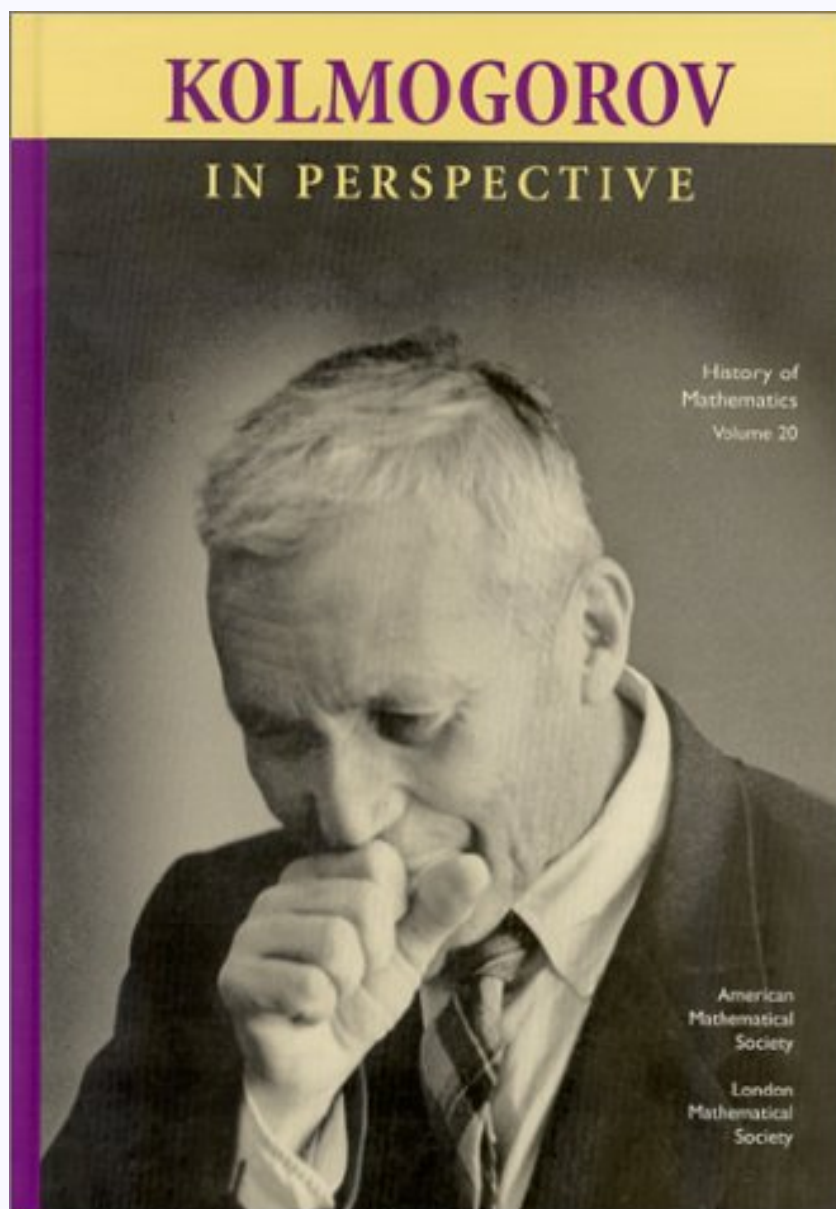


GoBack

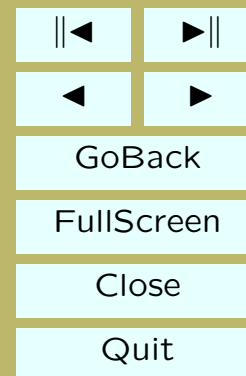
FullScreen

Close

Quit



15/57



n 3.3.3 分Ù ê x {



16/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



\hat{e}

$$X(t; !_1) = 2 \cos(t); \quad X(t; !_2) = -2 \cos(t); \quad t \in R:$$

且: $P(!_1) = 2=3; \quad P(!_2) = 1=3:$

求:

- 一维分 $\dot{U} \hat{e} F(0; x) \quad F(=4; x);$
- 二维分 $\dot{U} \hat{e} F(0; =4; x; y):$

Proof 知:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2; \frac{2}{3} \\ -2; \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}; \frac{2}{3} \\ -\sqrt{2}; \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

同之可 $\pm \quad X(0); X(=4)$ 联分 \dot{U}

$$(X(0); X(=4)) = \begin{pmatrix} (2; \sqrt{2}); \frac{2}{3} \\ (-2; -\sqrt{2}); \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



Question: $X(0); X(\pi/4)$ 相互独立吗??

~ 3.3.5 随机 §

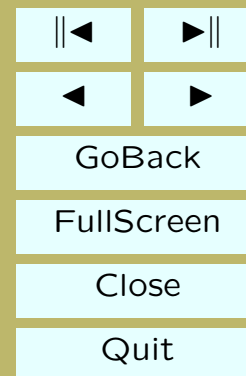
$$X(t) = A \cos(\omega t); t \in R$$

其中 $\omega > 0$, 随机变量 A 与 ϕ 相互独立, $A \sim U(0;1)$, $\phi \sim U(-\pi; \pi)$. 求 § 维概率密

Proof 先 $Y(t) = a \cos(\omega t)$, 其中 a 为 $\sim \hat{e}$, 求 $Y(t)$ 维概率密 \hat{e} 为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}}; & |y| < a \\ 0; & \text{others:} \end{cases}$$

5.2 : $Y(t) = X(t)|_{A=a}$, 由全概率公式及独立性, 可 ±





$$\begin{aligned} f_X(t; x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x|a) dF_A(a) = \int_0^1 f_{X|A}(x|a) da \\ &= \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} da = -\frac{1}{x} \log\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2} + 1}\right): \end{aligned}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



随机 § 特征

义 3.3.6 § $\{X(t); t \in T\}$ n 维特征 \hat{e} \hat{A} 为

$$(t_1; t_2; \dots; t_{n-1}; t_n)$$

$$E(\exp(i(\alpha_1 X(t_1) + \alpha_2 X(t_2) + \dots + \alpha_n X(t_n))))$$

$i \in \{(t_1; t_2; \dots; t_{n-1}; t_n); t_1; t_2; \dots; t_n; n \geq 1\}$ 为 X 有限维特征 \hat{e}_X .

义 3.3.7 $\{X(t); t \in T\} \sim$ 随机 §.

(1) $i X(t)$ 期望 $m_X(t) = E[X(t)]$ 为 § 均 函 数(如 存在 话).

(2) 如 $\forall t \in T; E[X^2(t)]$ 存在, 则 i 随机 § $\{X(t); t \in T\}$ 为二阶矩过程.

此之, $i \hat{e}(t_1; t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))];$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$t_1, t_2 \in T$ 为 \mathcal{S} 协方差函数; $Var[X(t)] = R_X(t; t)$ 为 \mathcal{S} 方差函数; $R_X(s; t) = E[X(s)X(t)]; s, t \in T$ 为 \mathcal{S} 自协方差函数.

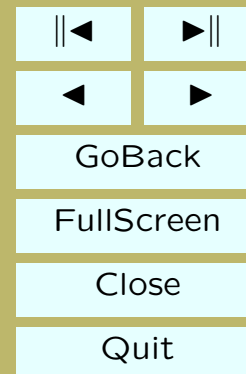
由Schwartz不等式知, 二阶矩 \mathcal{S} 协方差函数 $R_X(s; t)$ 存在, 且有 $Cov[X(s), X(t)] = R_X(s; t) - m_X(s)m_X(t)$:

~ 3.3.8 p, q 两个随机变量, 观测随机过程 \mathcal{S}

$$X(t) = p + qt; t \in T$$

p 值为 $\hat{m}(t)$: $m(t) = E[X(t)] = E(p) + tE(q)$. \mathcal{S} 协方差函数 $\hat{R}(s; t)$ 为

$$\begin{aligned} R(s; t) &= E[(p + qs)(p + qt)] \\ &= E(p^2) + E(pq)(s + t) + E(q^2)st: \end{aligned}$$





~ 3.3.9 利用抛硬币 \hat{A} $\hat{A} \sim$ 个随机 \mathcal{S}

$$X(t) = \begin{cases} \cos(t); & !_1 \\ 2t; & !_2 \end{cases}$$

求该 \mathcal{S} 均值 \hat{e} , 方差 \hat{e} , 相位 \hat{e} , 协方差 \hat{e} .

Proof 任 $\Phi \hat{e} t \in R$, 有:

$$X(t) = \begin{cases} \cos(t); & \frac{1}{2} \\ 2t; & \frac{1}{2} \end{cases}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$m_X(t) = E(X(t)) = \frac{1}{2} \cos(\omega t) + t$$

$$E(X^2(t)) = \frac{1}{2} \cos^2(\omega t) + 2t^2$$

$$D_X(t) = \frac{1}{2} \cos^2(\omega t) - t^2$$

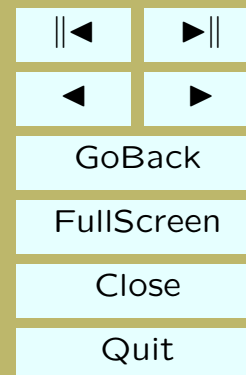
$$R(s; t) = E(X(s)X(t)) = \frac{1}{2} \cos(\omega t) \cos(\omega s) + \frac{1}{2} * 2t * 2s$$

$$= \frac{1}{2} \cos(\omega t) \cos(\omega s) + 2ts$$

~ 3.3.10 随机 §

$$X(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

其中 $\phi \sim U(0; 2\pi)$, 随机变量 A 与 ϕ 相互独立, $A \sim N(0; 1)$; $\phi \sim U(0; 2\pi)$. 求 $R(s; t)$ 值 ϕ 相 ϕ .





Proof

$$\begin{aligned}m_X(t) &= E(X(t)) = E(A \cos(t + \theta)) \\ &= E(A)E(\cos(t + \theta)) = 0:\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(s; t) &= E(X(s)X(t)) \\ &= E(A^2 \cos(t + \theta) \cos(s + \theta)) \\ &= \frac{1}{2} \cos(t - s): \end{aligned}$$

~ **3.3.11** $X(t) = X_0 + tV; a \leq t \leq b$, 其中 X_0, V 相互独立且服从 $N(0; 1)$ 分布. 随机过程 $X(t)$ 是 n 维正态分布. 所以只要知其一阶矩、二阶矩就完全确定了.

5: 易知 $X(t)$ 服从正态分布, 且 $X(t_1); \dots; X(t_n)$ 也是 n 维正态分布. 所以只要知其一阶矩、二阶矩就完全确定了.



GoBack

FullScreen

Close

Quit

它 分布.

$$m_X(t) = E[X(t)] = E(X_0 + tV) = EX_0 + tEV = 0$$

$$\begin{aligned} R(t_1; t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0 + t_1V)(X_0 + t_2V)] \\ &= E[X_0^2] + t_1t_2E[V^2] = 1 + t_1t_2: \end{aligned}$$



25/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.4 复随机过程（了解内容）

义 3.4.1 X, Y 为两个 \mathbb{C} 值随机 \mathcal{S} , i

$$Z(t) = X(t) + iY(t); \quad i = \sqrt{-1};$$

为复随机 \mathcal{S} 其均值 \hat{m} 为

$$m_Z(t) = E[X(t)] + iE[Y(t)];$$

方差 \hat{D} 为:

$$D_Z(t) = E(Z(t) - m_Z(t))^2 = D_X(t) + D_Y(t);$$

互相关 \hat{R} 为:

$$R_Z(s; t) = E[Z(s)\overline{Z(t)}] :$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.5 随机过程 基本a型

§3.5.1 平稳过程

义 3.5.1 如 随机 $\{X(t); t \in T\}$ 任 $t_1, \dots, t_n \in T$ 任 h ($t_i + h \in T$) 有,
 $(X(t_1 + h); \dots; X(t_n + h))$ 与 $(X(t_1); \dots; X(t_n))$ 同分布

27/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



若 $\{X(t); t \in T\}$ 为宽平稳 \mathcal{S} 或二阶平稳 \mathcal{S} .

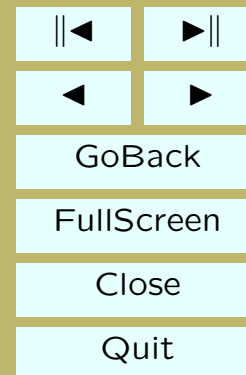
5:

- 对于宽平稳 \mathcal{S} , 由于 $R(s; t) = R(0; t - s); s; t \in \mathbb{R}$, 可记为 $R(t - s)$;
- $R(t)$ 为偶函数, 且 $R(0) = \text{var}(X(t)), |R(\tau)| \leq R(0)$;
- $R(\tau)$ 具有非负定性, 即 任意时刻 $t_k \in \mathbb{R}; k = 1; 2; \dots; N$, 有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j R(t_i - t_j) \geq 0:$$

参数 t 仅取整数值 $0; \pm 1; \pm 2 \dots$ 或 $0; 1; 2 \dots$, $\{X_n\}$ 为平稳 \mathcal{S} 为平稳序列.

~ **3.5.4** (平稳白噪声序列) $\{X_n; n = 0; 1; \dots\}$ 为一列两两互不相关随机变量序列, 满足 $EX_n = 0; n =$





0; 1; 2; ... , 且

$$EX_m X_n = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \sigma^2 & m = n \end{cases}$$

则白噪声(序列 $\{X_n; n = 0; 1; \dots\}$)为平稳. 这是因为协方差

$$\hat{c}ov(X_n; X_m) = E(X_n X_m) \text{ 只与 } m - n \text{ 有关.}$$

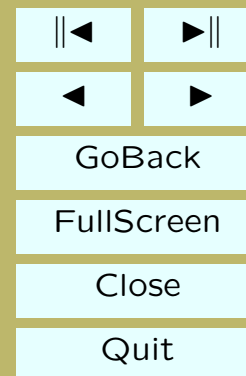
~ **3.5.5** (滑动平均序列) $\{X_n; n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ 为一列互不相关且有相同均值 m 方差 σ^2 随机变量序列.

$a_1; a_2; \dots; a_k$ 为任意 $k \neq \emptyset$. 考虑如下定义序列平稳性:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots + a_k X_{n-k}; \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

容易看

$$EX_n = m(a_1 + \dots + a_k):$$

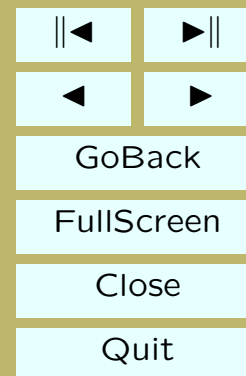




令 $j = n - m$, 则由 $\{X_n\}$ 两两互不相相关性知, 协方差 \hat{e}

$$\begin{aligned} (n+1; n) &= E[(X_n - m(a_1 + \dots + a_k))(X_{n+1} - m(a_1 + \dots + a_k))] \\ &= E[(a_1 X_{n+1} + \dots + a_k X_{n-k+1})(a_1 X_n + \dots + a_k X_{n-k+1})] \\ &= \begin{cases} a_1^2 + \dots + a_k^2 & \text{若 } 0 \leq n - (n-k+1) \leq k-1; \\ 0 & \text{若 } n - (n-k+1) \geq k; \end{cases} \end{aligned}$$

即协方差 \hat{e} 仅与 n 之间... 有 $\{X_n; n = 0; \pm 1; \dots\}$ 为平稳序列.





考虑如下两独立平稳 $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$:

$\{X_n; n \geq 0\}$ 为独立同分布随机变量序列, $E[X_n^2] < \infty; E[X_n] = m; n = 0; 1; 2; \dots$.

$\{Y_n = Y; n \geq 0\}$, 其中 Y 为随机变量, $E[Y^2] < \infty$.

可以用这两独立平稳 $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 来构造不同平稳 $\{Z_n\}$ 之间差异.

对于 $\{X_n\}$ 而言, 由大数定律知,

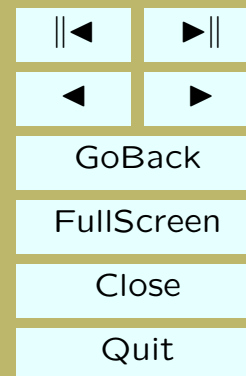
$$\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1})$$

以 $1/n$ 率收敛于 m . 对于 $\{Y_n\}$ 而言

$$\frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}) = Y$$

即经 n 次平均后, 随机性消失) 任意 n 变. 于 Y 然

) 这样问题: 在某种条件下, 平稳 $\{X_n\}$ 与 $\{Y_n\}$ 之间平均值可以等于 $\{Y_n\}$ 均值? \rightarrow 遍历性定理。





§3.5.2 独立增量过程

一、独立 §

定义 3.5.6 对任意正整数 n 及任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 随机变量 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ 相互独立, 且

$$\{x(t); t \in T\}$$

为独立 §

5: 独立随机 § 有限维分布由一维分布确定

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_k(t_k; x_k)$$

~ **3.5.7** 高斯白噪声 (实值之间序列 $\{x(n); n \in N\}$)

$$E\{x(n)\} = 0; D[(x(n))] = \sigma^2$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



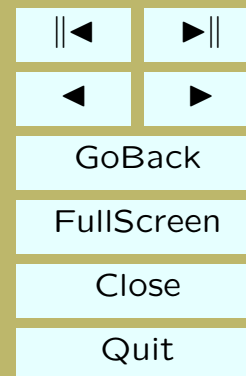
g 相 \hat{e} 为

$$R(m; n) = \begin{cases} 0; & m \neq n; \\ \sigma^2; & m = n; \end{cases}$$

如 两两序列 \hat{e} 相 \hat{e} , 则 $\{x(n); n \in N\}$ 为离散白噪 (序列)

又若 $x(n)$ 服从正态分布, $\{x(n); n \in N\}$ 为高斯白噪 (序列). 于 n 维正态随机变量有相互独立 $\Leftrightarrow \hat{e}$ 相 高斯白噪 (序列) 独立之间序列

义 3.5.8 如 任 $t_1; t_2; \dots; t_n \in T; t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 随机变量 $X(t_2) - X(t_1); \dots; X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立, 则 $X(t)$ 为 **独立增量** \S 如 任 $t_1; t_2$, 有 $X(t_1 + h) - X(t_1) \stackrel{d}{=} X(t_2 + h) - X(t_2)$, 则 $\{X(t); t \in T\}$ 为 **平稳增量** \S 兼有 **独立增量** **平稳增量** \S i



为平稳



34/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



由此可

$$E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\} = \chi_{(t)}(a) = E[e^{iaX(t)}]$$

即 $\{X(t)\}$ 具有平稳增量。

5: 平稳独立增量 $\{X(t)\}$ 均值 $E\{X(t)\}$ 与 t 线性 $E\{X(t)\} = at$ 。

本课 \S 后面将要介绍 Poisson \S Brown运动 \S 这类

§

35/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



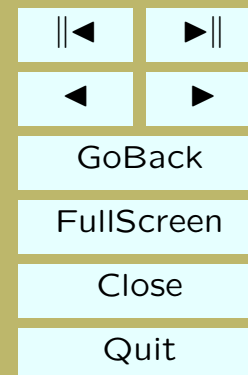
Proof 于任意 $n_1; n_2; \dots; n_m$

$$Y(n_2) - Y(n_1) = \sum_{k=0}^{n_2} X(k) - \sum_{k=0}^{n_1} X(k)$$
$$= X(n_1 + 1) + \dots + X(n_2):$$

$$Y(n_3) - Y(n_2) = \sum_{k=0}^{n_3} X(k) - \sum_{k=0}^{n_2} X(k)$$
$$= X(n_2 + 1) + \dots + X(n_3):$$

$$\vdots$$
$$Y(n_m) - Y(n_{m-1}) = \sum_{k=0}^{n_m} X(k) - \sum_{k=0}^{n_{m-1}} X(k)$$
$$= X(n_{m-1} + 1) + \dots + X(n_m):$$

因为 $X(n); n = 1; 2; \dots$ 相互独立, 所以 $\{Y(n); n \in N^+\}$ 独立增量 ξ 。





:

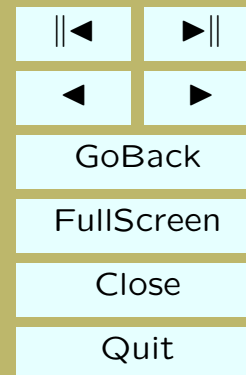
$$\begin{aligned}
C(s; t) &= E(X(t) - m(t))(X(s) - m(s)) \\
&= E(X(t)X(s)) - m(t)m(s) \\
&= E(X(t) - X(s) + X(s))X(s) - k^2ts \\
&= E(X(t) - X(s)) * EX(s) + EX(s)^2 - k^2ts \\
&= k(t - s) * ks + s^2 - k^2ts = s^2:
\end{aligned}$$

引理 3.5.12 独立增量 $\{X(t); t \geq 0\}$ 有限维分 $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$ 由 n 维分 $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$ 增量 分 $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$ 确 .

Proof 于 独立增量 $\{X(t); t \geq 0\}$, 任取 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 令

$$Y_1 = X(t_1); Y_2 = X(t_2) - X(t_1); \dots; Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1});$$

相互 立性, 据此利用特征 法可证明结论.





§3.6 分布

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之极限服从正态分布. 股票价格, 投资者相互影响, 也可以假服从正态分布. 由于一维随机变量可以用有限维分布来描述, 为研究正态变量应先研究多维正态分布随机变量.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



维正态随机变量

V 率密 与特征 \hat{e}

若 $(X; Y) \sim N(\mu_1; \sigma_1^2; \mu_2; \sigma_2^2; \rho)$ 记:

$$E \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} :$$

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

则 $Z := (X; Y)$ 联合 V 率密 为

$$\begin{aligned} f(x; y) &= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi |B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^T B^{-1} (Z - \mu) \right\} : \end{aligned}$$



定义 3.6.1 $B = (b_{ij})$ $n \times n$ 正定实对称阵, μ n 维实值列向量, X n 维随机向量

$$Z = (X_1; X_2; \dots; X_n)$$

联合密度函数为

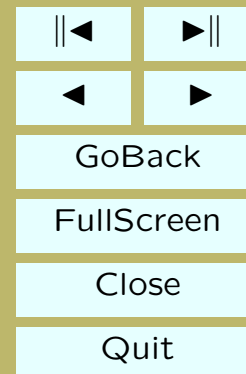
$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = \frac{1}{2^n |B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X - \mu)^T B^{-1} (X - \mu) \right\};$$

其中, $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, Z 服从 n 维正态分布.

$B = (b_{ij})$ $n \times n$ 正定实对称阵, 有 $|B| \neq 0$. 如 $|B| = 0$, 则不能利用上式来计算联合密度函数.

定理 3.6.2 n 维正态分布随机向量 $X = (X_1; X_2; \dots; X_n)$ 的特征函数为

$$\phi(t) = \exp \left\{ i t^T \mu - \frac{1}{2} t^T B t \right\}; \quad (3.6.1)$$





其中, $t = (t_1; t_2; \dots; t_n)$.

义 3.6.3 若 t 为 n 维 \mathbb{C} 向量, B 为 $n \times n$ 非负定阵, μ 为 n 维实向量, $(3.6.1)$ 中 X 为其特征函数, X 服从 n 维正态分布.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



边缘分布及二阶矩

以下假设 随机向量 $X = (X_1; X_2; \dots; X_n)$ 服从 $N(\mu; B)$.

n 3.6.4 n 维正态分布随机向量 任意 m 分量

$$(X_{k_1}; X_{k_2}; \dots; X_{k_m}); \quad m \leq n$$

- 服从正态分布 $N(e; B)$, 其中 $e = (\mu_{k_1}; \mu_{k_2}; \dots; \mu_{k_m})$. B 为 B 中保留 $k_1; k_2; \dots; k_n$ 行 列所 m 阶阵



GoBack

FullScreen

Close

Quit



多元正态分布 边缘分布仍为正态分布

n 3.6.5 设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ 为 n 维多元正态分布，其期望及协方差阵，即

$$E(X_i) = \mu_i; \quad 1 \leq i \leq n$$

$$b_{ij} = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j):$$

n 3.6.6 n 维多元正态分布随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 相互独立之充分条件是它们两两不相关。

44/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



正态随机向量 线性变换

服从正态分布 随机向量在线性变换下具有一些特 性质，有 大 理论价值与 用价值。

$X = (X_1; X_2; \dots; X_n)$, 记 $E(X) = \mu$, 协方 矩阵为 B ; X 分量 线性 |

$$Y = \sum_{j=1}^n l_j X_j = L X; L = (l_1; l_2; \dots; l_n)$$

则有,

$$E(y) = \sum_{j=1}^n l_j \mu_j = L \mu;$$

$$D(y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j l_k b_{jk} = L B L;$$

若 $C = (c_{jk})_{m \times n}$; $Z = CX$; 则

$$E(Z) = E(CX) = CE(X) = C \mu; D(Z) = CBC$$

n 3.6.7 $X = (X_1; X_2; \dots; X_n)$ 服从 n 维正态分



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$\dot{U}N(\mu; B)$ 之充分条件为它任 n 个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^n l_j X_j;$$

服从 n 维正态分布

因此, 可通过研究一维正态分布来研究 n 维正态随机变量。

n 3.6.8 若 $X = (X_1; X_2; \dots; X_n)$ 服从 n 维正态分布 $\dot{U}N(\mu; B)$; $C = (c_{jk})_{m \times n}$ 为任一 $m \times n$ 阵, 则 $Y = CX$ 服从 m 维正态分布 $\dot{U}N(\mu; CBC)$.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



Proof 于任意 m 维 \mathbb{C} 值列向量 t, Y 特征 \hat{e} 为

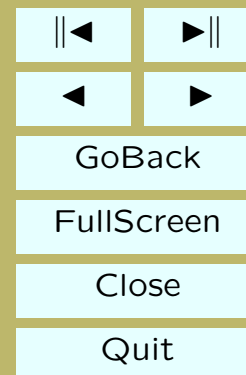
$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E(e^{it^T Y}) = E(e^{it^T C X}) = E(e^{i(C^T t)^T X}) \\ &= \exp\left\{i(C^T t)^T \mu - \frac{1}{2}(C^T t)^T B(C^T t)\right\} \\ &= \exp\left\{i(C^T \mu)^T t - \frac{1}{2}t^T (CBC^T)t\right\} \end{aligned}$$

即随机向量 $Y = CX$ 服从 m 维正态分布 $N(\mu; CBC^T)$

问题? 是否保证 $Y = CX$ 服从(非退化)正态分布?

- 1) $|CBC^T| \neq 0$ 且 X 服从正态分布(非退化), 从而非退化正态分布随机向量 X 满秩线性变换仍服从非退化正态分布.
- 2) 一般不保证结论成立.

~ **3.6.9** 随机向量 X_0 与 V 相互独立, 服从 $N(\mu; \Sigma)$ 正态





分 $\dot{U} N(0;1)$, 令

$$X_1 = X_0 + V; X_2 = X_0 + 2V; X_3 = X_0 + 3V;$$

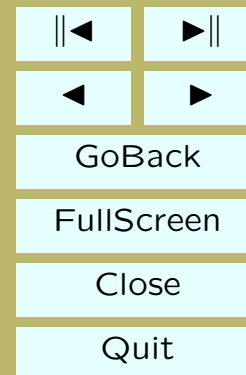
问: $(X_1; X_2; X_3)$ 否非退化正态分 \dot{U} ?

Proof

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix}$$

因

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix} \sim N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$





X 协方差矩阵为

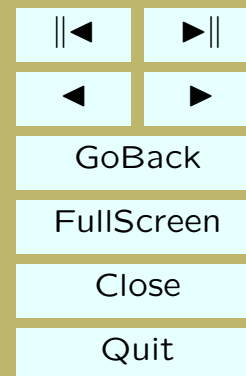
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$X = (X_1; X_2; X_3)$ 不是 (非退化) 正态分布.

一般, 二维相互独立正态随机向量 线性变换不是 n 维 ($n > 2$) 非退化正态分布.

论 3.6.10 若随机向量 X 服从 $N(\mu; B)$, 则存在 n 个正交变换 U , 使得 $Y = UX$ 有 n 个独立正态分量随机向量.

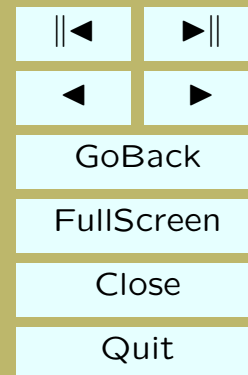




Proof 对任意实对称矩阵 B , 存在正交阵 U , 使得 $UBU^T = D$,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

d_i 为 B 的特征值. 若 B 正定 (从而非奇异) $\Rightarrow B$ 有 n 个线性无关的特征向量. U 以特征向量为列构成正交阵, 令 $Y = UX$ 则 证.





§3.6.1 随机过程

义 3.6.11 随机 $\{X(t); t \in T\}$ 为正态 $\{X(t)\}$, 如它任意有限维分 $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$ 为正态分 $\{X(t_1), \dots, X(t_n)\}$.

5:

- 1) 上述几定理均可应用于正态 $\{X(t)\}$.
- 2) 正态 $\{X(t)\}$ 二阶矩 $B(t_1, t_2)$, 并且它 n 维分布由其前二阶矩完全确定.

任意 $n \geq 1; t_1; t_2; \dots; t_n \in T;$

$$(X(t_1); \dots; X(t_n)) \sim N(\mu; B);$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$X(t) = \cos t + \sin 2t$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



因 $E(\dot{X}(t)) = 0$

$$\begin{aligned} R(s; t) &= E\{(\cos \omega t + \sin \omega t)(\cos \omega s + \sin \omega s)\} \\ &= E(\dot{X}^2) \cos \omega t \cos \omega s + E(\dot{X}^2) \sin \omega t \sin \omega s \\ &= \sigma^2 \cos \omega (s - t) = \sigma^2 \cos(\omega \tau); (\tau = s - t): \end{aligned}$$

由此可 得：

$$\Rightarrow D(X(t)) = R(t; t) = \sigma^2 \cos 0 = \sigma^2;$$

• 2) $X(t)$ 一维密度 为

$$f(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; x \in R$$

$X(t_i)$ 相互 独立正态随机变量 线性 | , $(X(t_1); X(t_2))$ 服从二维正态分布, 其相 系数 $\hat{\rho}$ 为

$$\hat{\rho} = \frac{R(s; t) - m(s)m(t)}{\sqrt{R(s; s)R(t; t)}} = \frac{\sigma^2 \cos \omega \tau}{\sigma^2} = \cos \omega \tau$$



§ $X(t)$ 二维密 为

$$f(x_1; x_2; s; t) = \frac{1}{2\sqrt{1-\cos^2 \theta}} e^{-\frac{x_1^2 - 2x_1x_2 \cos \theta + x_2^2}{2(1-\cos^2 \theta)}};$$

其中, $(x; y) \in R_2$:

仅与 $\theta = s - t$ 有 .

问题 : 否写此 § n 维 V 率密 ?

可证明: 于任意 $n, n \geq 3$ 任意 $t_1; t_2; \dots; t_n$,
 $(X(t_1); X(t_2); \dots; X(t_n))$ 不服从 n 维正态分布.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



实际应用:

怎样验证随机 $\{X(t) = \{X(t); t \in T\}$ 正态随机 $\{X(t)\}$?

任取 $n \geq 1$, 及 $t_1; t_2; \dots; t_n \in T$; 记

$$X = (X(t_1); \dots; X(t_n));$$

算法步骤如下:

- 1) 计算 X n 维协方差矩阵 B ;



GoBack

FullScreen

Close

Quit



- 4) 令 $Y = UX$, Y 协方差矩阵为 D ;
i 将 X 去相关性
- 5) 检验 $Y = (Y_1; Y_2; \dots; Y_n)$ 独立性;
随机 § 统计推断问题
- 6) 检验 Y 一维分布正态性.

结论:

若检验 $Y = (Y_1; Y_2; \dots; Y_n)$ 相互独立正态随机变量,
 $\Rightarrow X = U^{-1}Y$ n 维正态随机变量, 即 $X_t = \{X(t); t \in T\}$ 正态随机 §.

思考

- 1) 为以上算法写 \tilde{N} 理论依据;
- 2) $\setminus U$ 考虑用其他方法验证吗?



GoBack

FullScreen

Close

Quit