随　过程

吴卫星　&　邓军

对外经济贸易大学

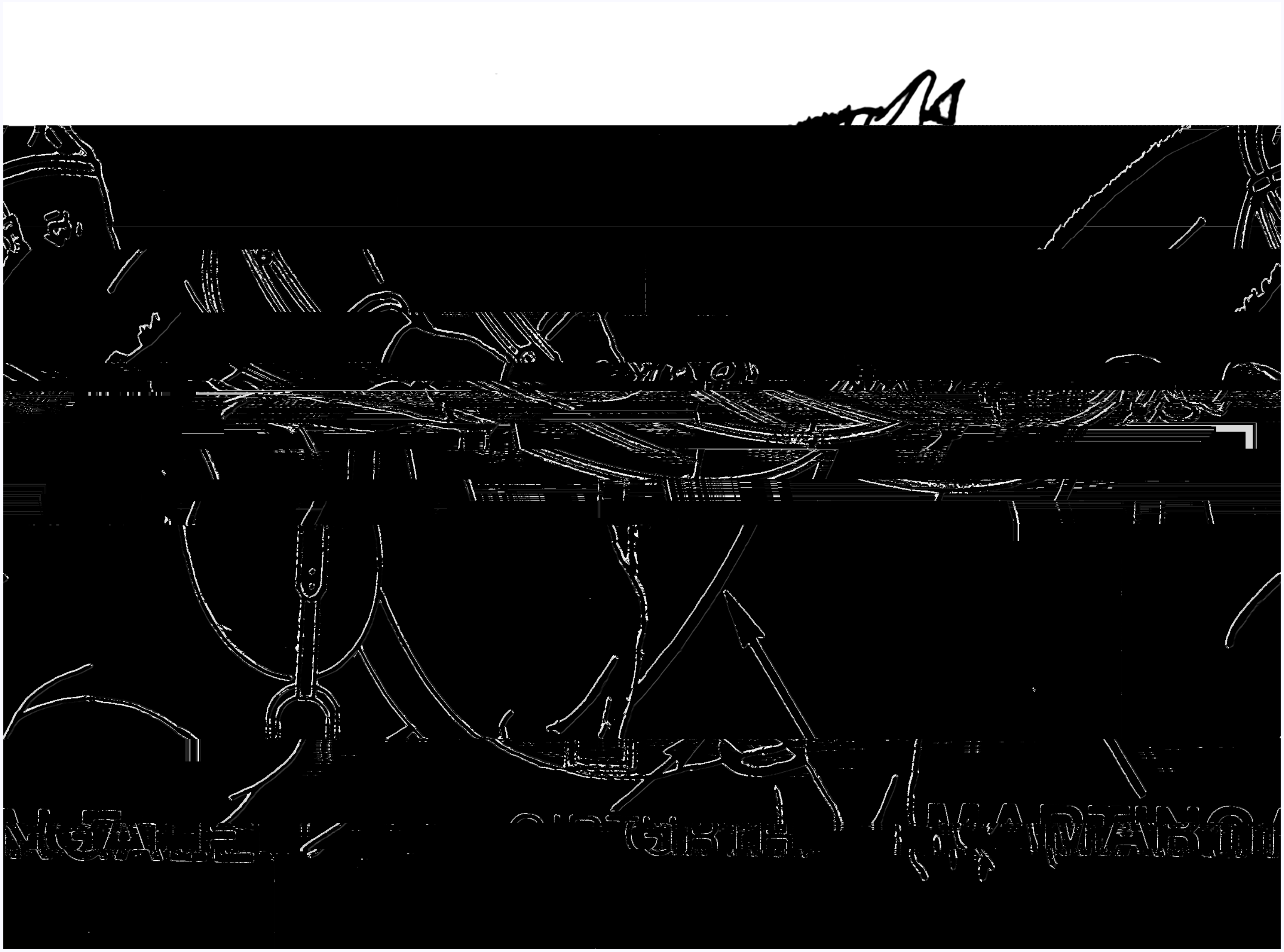
金 K 学院

第六章：　Martingale

□　‡

本章将介绍另一类特殊的随　过程—鞅.近几十年来，鞅理论不仅在随　过程及　他数学分支中占据了重要的地位，而□□□›‡‡

GoBack
FullScreen
Close
Quit



§6.1 本概念

每‡赌博者自，都对U使¦在一X 赌博后获得期望收益最大的策Ñ a， .，而在数Æ þ 以证明，在“ú平”的博‰中，是没有这样的赌博策Ñ的.

假设一‡赌博者正在？1一X 赌博，每次赌博输赢的VÇ都是$\frac{1}{2}$. -$\{Y_n; n=1;2;\cdots\}$, 是一 独立 分布的‘机变量，表示每次赌博的(果

$$P\{Y_n=1\}=P\{Y_n=-1\}=\frac{1}{2}$$

这里$\{Y_n=1\}$ ($\{Y_n=-1\}$)表示赌博者在第n次赌博时的赢(输).

GoBack
FullScreen
Close
Quit

X果赌博者采用的赌博策Ñ(即¤ e赌注)依赖于前面的赌博(果，@么¦的赌博　以用e面的‘机变量S

$$b_n = b_n(Y_1; \cdots ; Y_{n-1}); n = 2; 3; \cdots$$

描述，其中$b_n < \infty$是第n次的赌注，e赌赢则获利b_n，否则输掉b_n.

设X_0是T赌博者的初始赌资，则

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i Y_i \tag{6.1.1}$$

是¦在第n次赌博后的赌资. 以断ó

$$E[X_{n+1}|Y_1; \cdots ; Y_n] = X_n:$$

事实þ，由式(6.1.1)我们　以得到

$$X_{n+1} = X_n + b_{n+1}Y_{n+1};$$

因此

$$E[X_{n+1}|Y_1;\cdots;Y_n] = E[X_n|Y_1;\cdots;Y_n] + E[b_{n+1}Y_{n+1}|Y_1;\cdots;Y_n]$$

$$= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}|Y_1;\cdots;Y_n]$$

(因为X_n与b_{n+1}由$Y_1;\cdots;Y_n$ (定)

$$= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}]$$

(因为$\{Y_n\}$是独立‘ 机变量 S)

$$= X_n \quad (\text{因为 } E[Y_{n+1}] = 0; \ \forall n \geq 0)$$

这证明 ，X 果每次赌博的输赢机会是 þ 等的，并且赌博策 Ñ 是依赖于前面的赌博 (果，则赌博是“ ú 平的”．因此？何赌博者都不 U 将 ú 平的赌博 过 U 变赌博策 Ñ 使得赌博变成有利于自己的赌博.

鞅的直观本质意义

鞅描述的是“ú平”的赌博，e鞅和þ鞅分别描述“有利”赌博与“不利”赌博. e面我们定义关于 代数的鞅.

$\boxed{\text{域6 Filtration}}$

- ‰定样本 间Ω和时间指标集T，e存在一族 -代数 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 使得对？意的 $0 \le s < t$ 都有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$，则称 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 为 Ω þ 的一‡ 域6 (filtration).
- 对于V ç 间$(\Omega; \mathcal{F}; P)$，和Ω þ 的一‡域6 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$，则称 o元组 $(\Omega; \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}; P)$ 为一‡带域6的V ç 间，或者过È的 (filtered probability space) V ç 间。
- 域6的V g 以动 地 画‘机过程的 测5和&E递增，为后面的 件期望的定义做好准备。
- g ：带域6的V ç 间的Ü辑？

GoBack
FullScreen
Close
Quit

适应过程（adapted process）

- ‰定一‡带域6的V Ç 间 $(\Omega; \mathcal{F}; \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}; P)$. X果一‡ ‘机过程$\{X_t\}_{t\in T}$ ÷足对？意的$t \in T$都有

$$X_t \in \mathcal{F}_t; \quad \text{亦即} X_t \text{是} \mathcal{F}_t \text{ 测的，或记为} \quad (X_t) \subset \mathcal{F}_t;$$

则称$\{X_t\}$为关于域6 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ **适应的** (adapted) 过程。

- 适应过程在每一时间处都 以由当前已知 & E 来描述（而不是‰定）。

- 本 程中的7 K ‘机过程（资产价，、 资组合 寸等）都是适应的。

过程（predictable process）

- ‰定一‡带域6的VÇ 间 $(\Omega;\mathcal{F};\{\mathcal{F}_n\}_{n=0;1;\cdots;N};P)$. X果一‡ ‘ 机过程$\{X_n\}_{n=0;1;\cdots;N}$ ÷足对？意的n都有

  $X_n \in \mathcal{F}_{n-1};$ 亦即X_n是$\mathcal{F}_{n-1}$ 测的；

  则称$\{X_n\}$为关于域6 $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0;1;\cdots;N}$ (predictable) 过程。

- 过程在每一时间处都 以由前一期&E来描述（而不是‰定）。

- 在离Ñ时间 架e，我们 ø的策Ñ都是 的。

回忆　件数Æ期望的5质

定理 6.1.1 若X为一随机变量，$\mathcal{G}$为 —“数。则：

(1) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.

(2) 若X是$\mathcal{G}$可测，则$E[X|\mathcal{G}] = X; a:s:$.

(3) 设$\mathcal{G} = \{\emptyset; \Omega\}$，则$E[X|\mathcal{G}] = E[X]; a:s:$.

(7) $|E[X|\mathcal{G}]| \le E[|X||\mathcal{G}]; a:s:$.

(9) 设X及XY的期望•在，且Y为$\mathcal{G}$可测，则

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]; a:s:$$

(10) 若X与$\mathcal{G}$相互独立(即 (X)与$\mathcal{G}$相互独立)，则有

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X]; a:s:$$

(11) 若$\mathcal{G}_1$,$\mathcal{G}_2$ 是两个子 “数，使得$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$，则

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1]; a:s:$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

定义 6.1.2 设$\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$是一‡$\mathcal{F}$中的单调递增的子 代数 . ‘ 机过程$\{X_n; n \geq 0\}$称为关于$\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$的鞅，X果：

- $\{X_n\}$是$\{\mathcal{F}_n\}$ 适应的
- $E[|X_n|] < \infty$
- 并且$\forall n \geq 0$，有

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \tag{6.1.2}$$

- 适应 $\{X_n; \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$称为 e 鞅，X 果$\forall n \geq 0$,

$$E[X_n^+] < \infty \quad 且 \quad E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \tag{6.1.3}$$

- þ 鞅 以类 q 定义.

在‰出例子之前，k ‰出由定义直 出的命 .

命题 6.1.3 (1) 适应 $\{X_n;\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$是 e 鞅当且 = 当 $\{-X_n;\mathcal{F}_n;n\geq 0\}$是 þ 鞅.

(2) X 果$\{X_n;\mathcal{F}_n\}$, $\{Y_n;\mathcal{F}_n\}$是两 ‡ e 鞅， $a;b$ 是两 ‡ 正常数, 则$\{aX_n+bY_n;\mathcal{F}_n\}$是 e 鞅.

(3) X 果$\{X_n;\mathcal{F}_n\}$, $\{Y_n;\mathcal{F}_n\}$是两 ‡ e 鞅(或 þ 鞅)，则 $\{\max(X_n;Y_n);\mathcal{F}_n\}$ ($\{\min(X_n;Y_n);\mathcal{F}_n\}$) 是 e 鞅(þ 鞅).

证明是简单的，3 作 S .

e 以X_n表示一 ‡ 赌博者在第n次赌博后 ¤ 有的赌资. 式(6.1.2)表示：平 þ 而 ó ¦ 在 e 一次赌博 (束时的赌资将等于 y 时的赌资，与 ¦ 过 赌博的输赢无关.这也 ò 是 ` 鞅 ä 有一种“无后 5 ”， 时这 y 的正是博 ‰ 的 ú 平.

例 6.1.4 设$X_1; X_2; \cdots$是一族独立' 机变量S ，且$E[|X_i|] < \infty$，- $S_0 = 0; S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，则：

(a) e 对于 ¤ 有的n，$E(X_n) = 0$，则$\{S_n\}$是(关于$\mathcal{F}_n = (X_1; X_2; \cdots; X_n)$)的鞅.

(b) e $E(X_k) = \quad \neq 0$，则$\{M_n = S_n - n \quad\}$是(关于$\{\mathcal{F}_n\}$的)鞅.

证明：(a) 当$E[X_k] = 0; (k = 1; 2; \cdots)$时，易见$S_n$是$\mathcal{F}_n$测的，而且$E[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^{n} E[|X_i|] < \infty$，于是

$$
\begin{aligned}
E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= E[X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{F}_n] + E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= S_n
\end{aligned}
$$

从而$\{S_n\}$是一‡关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅. 理 以证明(b). ∎

例 6.1.5 在例6.1.4中设$E[X_k] = \quad \neq 0; E[|X_k|] < \infty; (k = 1; 2; \cdots)$，则有$E[|S_n|] < \infty$，

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1}|\mathcal{F}_n\Big] = S_n +$$

w ,， e $> 0(\quad < 0)$，则$\{S_n\}$是一关于$\{\mathcal{F}_n\}$的 e 鞅(þ 鞅).

例 6.1.6 Ä一‡ú平博‰问 . 设$X_1; X_2; \cdots$独立分布，分布函数为

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

于是 以将$X_i(i = 1; 2 \cdots)$ 做一‡ 硬币游Z的(果：X果出y正面ò赢1元，出y反面则输1元. 假设我们按以e的规则来赌博，每次 掷硬币之前的赌注都比þ一次翻一倍，直到赢 赌博即 . - W_n表示第n次赌博后¤输(或赢)的总钱数，则$W_0 = 0$，由于无ø何时只要赢 ò 止赌博，¤以W_n从赢 之后起ò不再变化，于是有$P\{W_{n+1} = 1 | W_n = 1\} = 1$.

e 假设前n次 掷的硬币都出 y 反面，按照规则，我们已 ² 输 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 元，即$W_n = -(2^n-1)$. 假 X e 一次硬币出 y 的是正面，按规则$W_{n+1} = 2^n-(2^n-1)=1$，由 ú 平的前 知道

$$P\{W_{n+1}=1|W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}$$

$$P\{W_{n+1}=-2^n-2^n+1|W_n=-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}$$

易证$E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = W_n$，这里$\mathcal{F}_n = (X_1;\cdots;X_n)$，从而$\{W_n\}$是一‡关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅.

例 6.1.7 我们 以把例6.1.6再一般化.设$X_1; X_2; \cdots$ E X 例6.1.6假定，而每次赌博¤ e赌注将与前面硬币的 掷 (果有关，以B_n记第n次¤ e的赌注，则B_n是 $X_1; \cdots; X_{n-1}$的函数，换 ó 之B_n是$\mathcal{F}_{n-1}$ 测的 (设B_1为常数). E ， - W_n 例6.1.6之定义，$W_0 = 0$，则有

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} B_j X_j$$

假设$E[|B_n|] < \infty$(这保证 每次的赌本都有一定！制)，@ 么$\{W_n\}$是一‡$\{\mathcal{F}_n\}$ 鞅.

事实þ，注意到$E[|W_n|] < \infty$ (这　由$E[|B_n|] < \infty$得到)，而且W_n是$\mathcal{F}_n$　测的，并且

$$
\begin{aligned}
E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[\sum_{j=1}^{n+1} B_j X_j|\mathcal{F}_n] \\
&= E[\sum_{j=1}^{n} B_j X_j|\mathcal{F}_n] + E[B_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{j=1}^{n} B_j X_j + B_{n+1}E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= W_n + B_{n+1}E[X_{n+1}] \\
&= W_n
\end{aligned}
$$

例 6.1.8 (Polya 子抽样 .) Ä一‡装有红、黄两Ú球的 子.假设最初 子中装有红、黄两Ú球ˆ一‡，每次都按X e规则有放回地‘机抽 ：X果<出的是红Ú的球，则放回的 时再加\一‡ Ú的球；X果<出是黄Ú的球也采 样的法. 以X_n表示第n次抽 后 子中的红球数，则$X_0 = 1$，且$\{X_n\}$是一‡非时齐的Markov链，转移V Ç为

$$P\{X_{n+1} = k+1 | X_n = k\} = \frac{k}{n+2}$$

$$P\{X_{n+1} = k | X_n = k\} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

- M_n表示第n次抽 后红球¤占的比例，则$M_n = \frac{X_n}{n+2}$，并且$\{M_n\}$是一‡鞅. 这是因为

$$E[X_{n+1}|X_n] = X_n + \frac{X_n}{n+2}$$

由于$\{X_n\}$是一‡Markov链，则$\mathcal{F}_n = \quad (X_1; \cdots; X_n)$中对$X_{n+1}$有影•的& E都包含在$X_n$中，¤以

$$
\begin{aligned}
E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[M_{n+1}|X_n] \\
&= E\left[\frac{X_{n+1}}{n+1+2}|X_n\right] \\
&= \frac{1}{n+3}E[X_{n+1}|X_n] \\
&= \frac{1}{n+3}(X_n + \frac{X_n}{n+2}) \\
&= \frac{X_n}{n+2} = M_n.
\end{aligned}
$$

本例ïÄ的　.是Polya首次引\的，§适用于描述+增值和传/病的传播等y-.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

e 面的引理　以 4 我们由已知的鞅或 e 鞅构造出 N 多 # 的 e 鞅.

Ä 定义在有穷域无穷　区间 I þ 的函数 $'(x)$，称 § 为的，e $\forall x; y \in I; 0 <\quad < 1$，有

$$'(x) + (1 - \quad)'(y) \geq '[\quad x + (1 - \quad)y] \tag{6.1.4}$$

成立.

引理 6.1.9 (条件Jensen不等式) 设 $'(x)$为实数集$\mathbb{R}$上的凸函数，随机变量M满足

(1)　$E[|M|] < \infty$;

(2)　$E[|'(M)|] < \infty$.

则有

$$E['(M)|\mathcal{F}_n] \geq '[E[M|\mathcal{F}_n]] \tag{6.1.5}$$

其中$\mathcal{F}_n$是任意递增的　“ 数列.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

式(6.1.5)是著名的 件Jensen不等式，由§即 得到以 e定理.

定理 6.1.10 设$\{M_n; n \geq 0\}$是关于$\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$的鞅(下鞅)，$'(x)$是$\mathbb{R}$上的凸函数，且满足$E['(M_n)^+] < \infty; \forall n \geq 0$，则$\{'(M_n); n \geq 0\}$是关于$\{\mathcal{F}_n; n \geq 0\}$的下鞅. 特别地，$\{|M_n|; n \geq 0\}$是下鞅；当$E[M_n^2] < \infty; \forall n \geq 0$时，$\{M_n^2; n \geq 0\}$也是下鞅.

证明：š â 定义易证，请读者利用引理6.1.9 导.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

§6.2 鞅的停时定理及

§6.2.1 鞅的停时定理

本！中我们¤ Ø的鞅，都是指关于，‡‘机变量S的鞅.¤得到的(Ø对关于 代数6的鞅也是成立的，为 便于理)和应用，我们没有追求(Ø的一般5. 对于一‡关于$\{X_n; n \geq 0\}$的鞅$\{M_n; n \geq 0\}$，易知$\forall n \geq 0$，有

$$E[M_n] = E[M_0] \qquad (6.2.1)$$

我们Ž知道X果把此处固定的时间n换作一‡‘机变量T，是否E，有

$$E[M_T] = E[M_0] \qquad (6.2.2)$$

一般地，此(Ø未必成立.但在一定的 件e 以保证§成立，这Ò是鞅的 时定理. 鞅的 时定理的意义是："在ú平的赌博中，\不 U赢." 设Ž$\{M_n; n \ge 0\}$是一种ú平的博•，M_n表示Û中<第n次赌Û(束后的赌本.式(6.2.1)`明¦在每次赌Û(束时的赌本与¦ 始时的赌本一样，但是¦未必一直赌e ，¦ 以À择?一时 止赌博，这一时 是'机的.式(6.2.2)`明¦ 止时的赌本和¦ 始时的赌本f ，，而很N易 出在一般的情 e，这是不正(的.比X例6.1.6中的赌博者采 的策Ñ，Ò 以保证¦在赢一元之后(束，¤以我们要为式(6.2.2)的成立N加一 件.

定义 6.2.1 (时) 设$\{X_n; n \ge 0\}$是一‡‘机变量S，称‘机函数T是关于$\{\mathcal{F}_n := \{X_0; X_1; \cdots; X_n\}; n \ge 0\}$的 时，X果 T在$\{0; 1; 2; \cdots; \infty\}$中 值，且对每‡$n \ge 0$，$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n := \{X_0; X_1; \cdots; X_n\}$.

由定义我们知道事件$\{T = n\}$或$\{T \ne n\}$都应T由n时及其之前的&E完 (定，而不I要也无法/助将来的情.E，回到ú平博•的例子，赌博者û定何时 止赌博只U以¦已²赌过的(果为依â，而不U`，X果我e一次要输我y在Ò 止赌博，这是对 止时 T 的第一‡要求：§L是一‡ 时.

以e 几‡ 时的例子.

例 6.2.2 (定时 $T = n$是一‡ 时，即在赌博 始已(定nÛ之后一定(束，易见这是一‡ 时.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 6.2.3 (首达时)$\{X_n; n \geq 0\}$是一‡‘机变量S ，
A是一‡事件集，-

$$T(A) = \inf\{n; X_n \in A\}; \text{并约定 } T(\emptyset) = \inf\{n; X_n \in \emptyset\} = \infty;$$

见$T(A)$是$\{X_n; n \geq 0\}$首次？\ A(即发生 A中¤含事件)的时 ，称$T(A)$是$\{X_n; n \geq 0\}$到集合A 的首达时。则：
$T(A)$是关于$\{X_n; n \geq 0\}$的 时.

证明： 事实þ

$$\{T(A) = n\} = \{X_0 \in A; X_1 \in A; \cdots; X_{n-1} \in A; X_n \in A\}$$

w ，$\{T(A) = n\}$完 由$X_0; X$

命题 6.2.5 设T是取值于$\{0; 1; 2; \cdots; \infty\}$的随机变量，则下述三者等价

(1) $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n := \quad (X_0; X_1; \cdots; X_n)$;

(2) $\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n := \quad (X_0; X_1; \cdots; X_n)$;

(3) $\{T > n\} \in \mathcal{F}_n := \quad (X_0; X_1; \cdots; X_n)$.

只要注意到X e等式，即　证明(1),(2),(3)的等价5 .

$$\{T \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}$$

$$\{T > n\} = \Omega - \{T \le n\}$$

$$\{T = n\} = \{T \le n\} - \{T \le n - 1\}$$

这Ò　以证明$T+S; \max(T;S)$和$\min(T;S)$是　时. 别地，由例6.2.2　知，常数 n是　时. 设T是　时，- $T_n=\min\{T;n\}$, 则每‡T_n都是　时，并且有 $T_0\le T_1\le T_2\le \cdots \le T_n\le n, \forall n$.

在‰出　时定理之前k注意以e事实 .

命题 6.2.6 设$\{M_n; n\ge 0\}$是一个关于$(\mathcal{F}_k)_{0\le k}$的鞅，T是一个关于$(\mathcal{F}_k)_{0\le k}$的停时，且 $T\le K$。其中，K为一正整数。则

$$E[M_T|\mathcal{F}_0]=M_0$$

特别地，

$$E[M_T]=E[M_0]$$

证明：由于$T\le K$，即T只　有•值，且当$T=j$时$M_T=$

M_j，我们 以把M_T 作

$$M_T = \sum_{j=0}^{K} M_j I_{\{T=j\}} \tag{6.2.3}$$

对式(6.2.3)关于$\mathcal{F}_{K-1}$ 件期望，有

$$E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}] = E[\sum_{j=0}^{K} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}]$$
$$= E[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}] + E[M_K I_{\{T=K\}}|\mathcal{F}_{K-1}]$$

当$j \leq K-1$时，M_j和$I_{\{T=j\}}$都是$\mathcal{F}_{K-1}$ 测的，从而

$$E[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}|\mathcal{F}_{K-1}] = \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}$$

又因为$T \leq K$已知，则$\{T = K\}$与$\{T > K-1\}$是等价的，由例6.2.4中 (果知 $\{T > K-1\} \in \ (X_0; \cdots ; X_{K-1})$，因

此

$$
\begin{aligned}
E[M_K I_{\{T=K\}}|\mathcal{F}_{K-1}] &= I_{\{T>K-1\}}E[M_K|\mathcal{F}_{K-1}] \\
&= I_{\{T>K-1\}}M_{K-1}
\end{aligned}
$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

从而

$$
\begin{aligned}
E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}] &= I_{\{T>K-1\}}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}} \\
&= I_{\{T>K-2\}}M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-2} M_j I_{\{T=j\}}
\end{aligned}
$$

重E以þ运Ž，关于$\mathcal{F}_{K-2}$ 件期望，我们 以得到

$$
\begin{aligned}
E[M_T|\mathcal{F}_{K-2}] &= E[E[M_T|\mathcal{F}_{K-1}]|\mathcal{F}_{K-2}] \\
&= I_{\{T>K-3\}}M_{K-2} + \sum_{j=0}^{K-3} M_j I_{\{T=j\}}
\end{aligned}
$$

继Y这样的过程，最终有

$$
E[M_T|\mathcal{F}_0] = I_{\{T\geq 0\}}M_0 = M_0
$$

∎

定理 6.2.7 (鞅停时定理)

设$\{M_n; n \geq 0\}$是一个关于$\{\mathcal{F}_n\}$的鞅，T是停[redacted]

$$(1) P\{T < \infty\} = 1;$$

$$(2) E[|M_T|] < \infty;$$

$$(3) \lim_{n\to\infty} E[|M_n| I \quad ; \quad 1 \quad ;$$

例 6.2.8 设$\{X_n\}$是在$\{0; 1; \cdots; N\}$þ 的简单‘机游动($p = \frac{1}{2}$)，并且0和N为两‡吸收壁.设$X_0 = a$。即当X触及到0或者N时，ò 止不动 。计Ž：X被N吸收的V ç 。

Proof N 易验证$\{X_n\}$是一‡鞅. -

$$T = \min\{j : X_j = 0或N\}$$

，则T是一‡ 时。由于X_n的 值有 . ，故式(6.2.5)(6.2.6)÷足(注意到e鞅本身 值有 . 且式(6.2.4)成立，则式(6.2.5)和式(6.2.6)一定成立，这也是，一种/式的鞅 时定理).从而

$$E[X_T] = E[X_0] = a$$

由于此时X_T只 两‡值$N; 0$，

$$E[X_T] = N \cdot P\{X_T = N\} + 0 \cdot P\{X_T = 0\}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

从而得到

例 6.2.9 **(忽Ñ这‡例子) -** X_n和T X 例6.2.8定义, 假定$M_n = X_n^2 - n$, 则$\{M_n\}$是关于$\{X_n\}$的鞅. 这是因为

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n^2 + 1 - (n+1) = X_n^2 - n = M_n \end{aligned}$$

易见，此时M_n不是一‡有 . 鞅，不U立 得出式(6.2.5),(6.2.6)成立，但是 以证明，存在$C < \infty;\ \ < 1$，使得

$$P\{T > n\} \le C\ ^n \qquad (6.2.7)$$

因为$|M_n| \le N^2 + n$， 知$E[|M_T|] < \infty$，并且

$$E[|M_n| I_{\{T > n\}}] \le C\ ^n(N^2 + n) \to 0$$

从而 时定理的 件÷足，我们有 (ø

$$E[M_T] = E[M_0] = a^2$$

注意到

$$E[M_T]=E[X_T^2]-E[T]$$

$$=N^2P\{X_T=N\}+0\cdot P\{X_T=0\}-E[T]=aN-E[T]$$

从而

$$E[T]=aN-a^2=a(N-a)$$

这是 止之前I要的平þ时间.

注 式(6.2.7)是Markov链中的一‡间 ，设$\{X_n\}$是一‡不 约的Markov链，状 间为 $\{0;1;\cdots;N\}$，则存在$C<\infty;\quad<1$，使得

$$P\{X_m\neq j;m=0;1;\cdots;n|X_0=i\}\leq C\quad^n$$

读者 自己证明.(示：存在 >0,使得$\forall i$，从i出发在N步S到达过j的VÇ大于 .)

§6.3 连续鞅

前面我们 ø 鞅的 时定理，也称为 À 抽样定理(optional sampling theorem)和鞅收敛定理.请注意这里的鞅都是以离 Ñ 时间n为参数的.事实 þ，对于连 Y 参数鞅(E 称为鞅)也有类 q 定理.

首 k ‰ 出鞅的定义.设$(\Omega;\mathcal{F};P)$是一 ‡ 完备的 V ç 间；$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$为一 ‡ 非降的$\mathcal{F}$的子 代数 6 .本书中 ¤ 涉及的子 代数 6 都是非降的，因此以后我们 Ò 将“非降的”省 Ñ，简称为子 代数 6 .

GoBack
FullScreen
Close
Quit

定义 6.3.1 ‘机过程$\{X(t); t \geq 0\}$(简记为$\{X_t\}$)称为$\{\mathcal{F}_t\}$适应的，X果对每‡$t \geq 0$, X_t为$\mathcal{F}_t$ 测. 一‡过程$\{X_t\}$称为关于$\{\mathcal{F}_t\}$的鞅，X果:

- （1） $\{X_t\}$为$\{\mathcal{F}_t\}$适应的过程，
- （2）每‡X_t 积(即$E[|X_t|] < \infty$)
- （3）且对一切$0 \leq s < t$，有

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s; \quad a:s: \tag{6.3.1}$$

- e ‘机过程$\{X_t; t \geq 0\}$是鞅，则对$t > 0$, 有

$$E[X_t] = E[E[X_t|X_0]] = E[X_0] \tag{6.3.2}$$

例 6.3.2 设 为一可积随机变量 $(E(|\ |) < +\infty)$。则过程$X_t := E(\ |\mathcal{F}_t)$为 $(\mathcal{F}_t)$的鞅。

例 6.3.3 设$\{Y_t; t \geq 0\}$是 " 初值 ä 有平稳独立增量的 ‘ 机过程. -

$$X_t = X_0 e^{Y_t}$$

其中X_0为一常数. e $E[e^{Y_t}] = 1$，则$\{X_t; t \geq 0\}$是一 ‡ 鞅.事实 þ

$$E[|X_t|] = |X_0| E[e^{Y_t}] = |X_0|$$

再对$0 \leq s < t$，有

$$\begin{aligned} E[X_t | X_r; 0 \leq r \leq s] &= E[X_s e^{Y_t - Y_s} | X_r; 0 \leq r \leq s] \\ &= X_s E[e^{Y_t - Y_s}] \\ &= X_s E[e^{Y_{t-s}}] = X_s; \quad a.s. \end{aligned}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

定义 6.3.4 ‘机变量 (即 $:\Omega \longrightarrow [0;\infty]$) 称为$\mathcal{F}_t$时， X 果$P\{\ <\infty\}=1$，并且对一切$t\geq 0$，$\{\ \leq t\}$是$\mathcal{F}_t$ 测的，即

$$\{\ \leq t\}\in\mathcal{F}_t$$

别地，当$\mathcal{F}_t = \ (X_s;0\leq s\leq t)$时， 称为关于‘机过程$\{X_t;t\geq 0\}$的 时. e 存在常数$k>0$使得$P\{\ \leq k\}=1$，则称 为有 . 时.

e面是鞅ø的一‡重要(ø—— 时定理，即在适当件e，将式(6.3.2)中的t置换成 时 时，等式E，成立.

定理 6.3.5 若 是有．停时，则有

$$E[X\ ] = E[X_0]$$

鞅ø的，一‡重要的(果是收敛定理.

定理 6.3.6 设$\{X_t; t \geq 0\}$是一个鞅并且$X_t \geq 0; \forall t \geq 0$(简称为非负鞅)，则•在几乎??收敛的有限极限，即有

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty < \infty; \quad a{:}s{:}$$