应用随机 L 程

星， " 军

é 经济贸易大学

金融学院

1　章：　Markov链

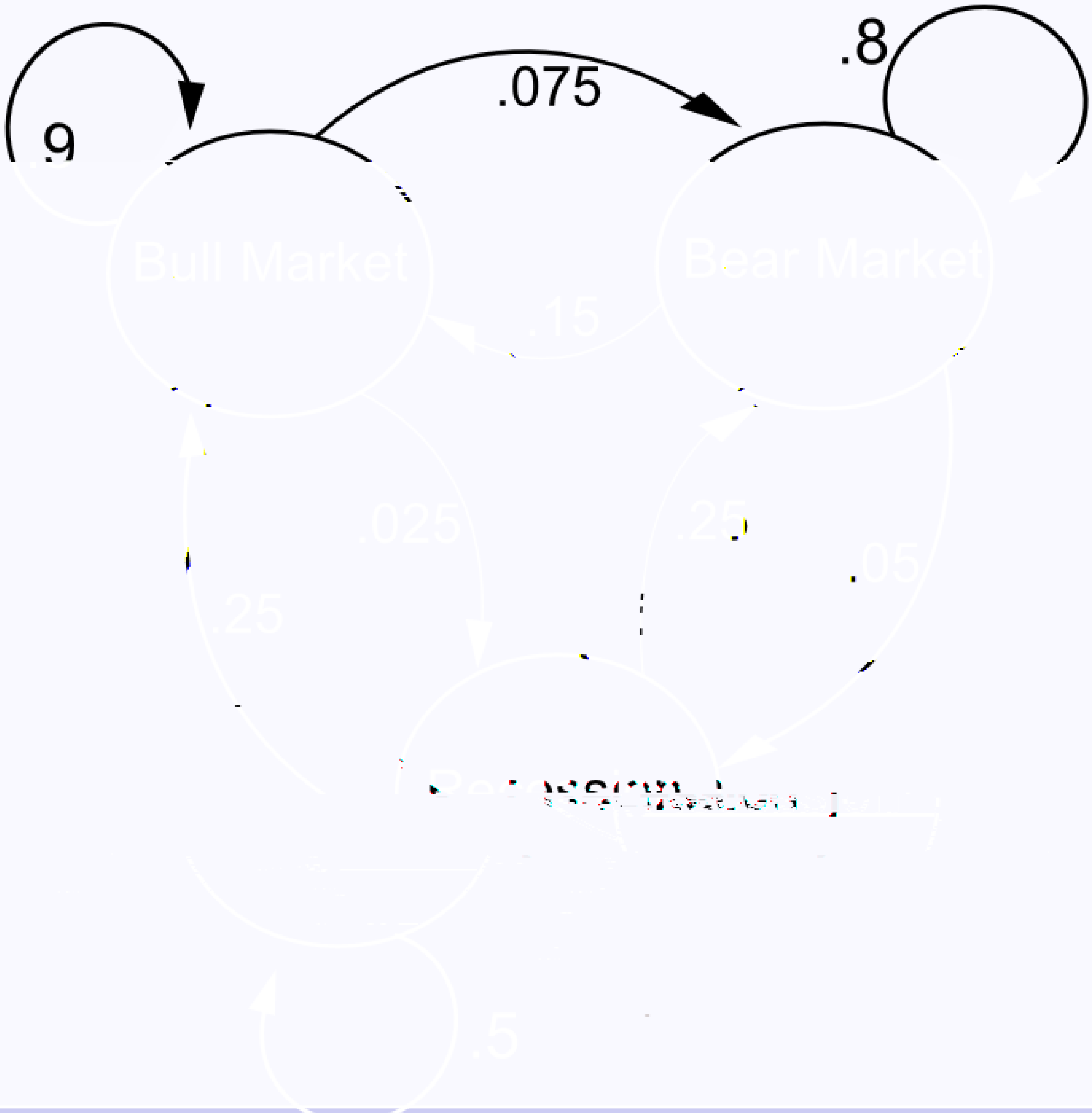
基本概念

　态　分类及性质

极限½理及　　分布

Markov链　应用

连续时间Markov链


.9
.075
.8
Bull Market
Bear Market
.15
.025
.25
.05
.25
.5

有一类随机L程，它具备所 “ 后效性”(Markov性)，即要确½ L程将来 态，知 它此刻 情况就 了，并不需要é它以 况 认识，这类L程称 Markov L程. 们将介绍Markov L程中 简单 两种类型：离散时间 Markov链(简称马氏链)及连续时间 Markov链.

x7.1 基本概念

x7.1.1 Markov链 ½义及一些例

½义 7.1.1 随机过程$f X_n; n = 0; 1; 2;$ g称为**M**arkov链，若它只取有限或可列个值(若不另外说明，以非负整ê集$f0; 1; 2;$ g来表«)，并且对任意的 n 0，及任意状 $i; j; i_0; i_1$ $; i_n \ 1$，有

$$P f X_{n+1} = j j X_0 = i_0; X_1 = i_1; \quad ; X_{n \ 1} = i_{n \ 1}; X_n = ig$$
$$= P f X_{n+1} = j j X_n = ig \qquad (7.1.1)$$

其中$X_n = i$表«过程在ž刻n处于状 i，称$f0; 1; 2;$ g为该过程的状 空间，记为S. ª(7.1.1)刻画了Markov链的性，称为**M**arkov性.

½义 7.1.2 称(7.1.1) ª 中的 件概率 $PfX_{n+1}=jjX_n=ig$为Markov链$fX_n;n=0;1;2;$ g的**一步转移概率**，简称转移概率，记为p_{ij}，它代表处于状 i的过程下一步转移到状 j的概率.

一般情况下， 移概率与 态i, j Ú 时刻n有 ' .

½义 7.1.3 当Markov链的转移概率 $p_{ij}=PfX_{n+1}=jjX_n=ig$只与状 $i;j$有关，而与n无关ž，称之为**时 Markov链**；否则，就称之为非ž齐的.

在课程中， 们只讨论时 Markov链，并且简称 Markov链.

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

Markov链　　态　有限时，称　有限链，否则称　限链．　论　态有限还是　限，　们Ñ可以将$p_{ij}(i;j\ \ 2\ S)$排成一个矩阵　形式，令

$$\mathbf{P} = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{00}\, p_{01}\, p_{02} & \\ p_{10}\, p_{11}\, p_{12} & \\ p_{20}\, p_{21}\, p_{22} & \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (7.1.2)$$

称**P**　　移概率矩阵，　一般简称　　移矩阵.由于概率是非负　，且L程必须　移　某个　态，所以容易看出$p_{ij}(i;j\ \ 2\ S)$有性质

$$\begin{aligned} &(1)\quad p_{ij}\quad 0; \quad i;j\ 2\ S; \\ &(2)\quad \textstyle\sum_{j2S} p_{ij} = 1; \quad 8i\ 2\ S: \end{aligned} \qquad (7.1.3)$$

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

½义 7.1.4 称矩阵为**随机矩阵**，若矩阵元素具有(7.1.3)ª中两 性质.

易见随机矩阵每一行元素 Ú Ñ 1.

例 7.1.5 (一个简单的疾病、死亡模型，Fix-Neyman) 考虑一个包含两个健康状 $S_1; S_2$ 以及两个死亡状 $S_3; S_4$ (即由不 原因引起的死亡)的模型.若个 病愈，则认为它处于状 S_1，若它患病，说它处于S_2，个 可以从S_1,S_2进入S_3和S_4，易见这´一个马¼链的模型，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例 7.1.6 (赌　的破产或称带吸 Â 壁的随机游动) 系的状

例 7.1.7 (带反　壁的随机游动)　上例中当赌博者 Ñ 光 ž 将获得赞助1让他继续赌下去，就如　一个在直线上做随机游动的球在到达左侧0点处就立刻反弹回1一样，这就 ´ 一个一侧带有反　壁的随机游动.此 ž 转移矩阵为

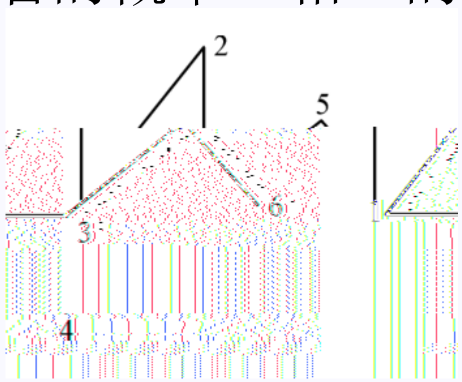
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 & 0\,0\,0 \\ q\,0\,p\,0 & 0\,0\,0 \\ 0\,q\,0\,p & 0\,0\,0 \\ \vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots & \vdots\,\vdots\,\vdots \\ 0\,0\,0\,0 & q\,0\,p \\ 0\,0\,0\,0 & 0\,0\,1 \end{pmatrix}_{(n+1)\quad(n+1)}$$

同样可考虑两侧均有反射壁　情况.

例 7.1.8 (自由随机游动) 一个球在全直线上做无限制的随机游动，它的状 为$0;\ 1;\ 2;$.它仍´ 一个Markov链，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & q & 0 & p & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p & 0 \\ & & & 0 & q & 0 & p \end{pmatrix}$$

例 7.1.9 (上的简单随机游动) 有一蚂蚁在如 5-1上爬行，当两个结点相临 ž，蚂蚁将爬向它临近的一点，并且爬向任何一个邻居的概率 ´ 相 的.



则此Markov链的转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

x7.1.2 n步 移概率，C-K方程

½义 7.1.10 称 件概率

$$p_{ij}^{(n)} = P f X_{m+n} = j j X_m = i g; \quad i; j \ 2 \ S; m \quad 0; n \quad 1 \tag{7.1.4}$$

为Markov链的n步转移概率，相应地称$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ 为n步转移矩阵.

$$n = 1\text{时}, \ p_{ij}^{(1)} = p_{ij}; \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}\text{，此} \quad 5 \ ½$$

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0; & i \ 6= j \\ 1; & i = j \end{cases} \tag{7.1.5}$$

显然，n步 移概率$p_{ij}^{(n)}$指 就是系统从 态i经 L n步后 移 j 概率，它 é 中间 n 1步 移经 L 态 要求.

下面 ½理给出了$p_{ij}^{(n)}$ Ú p_{ij} ' 系.

½理 7.1.11 **(Chapman-Kolmogorov方 ，简 C-K方)**

一切$n; m \quad 0; i; j \ 2 \ S$有

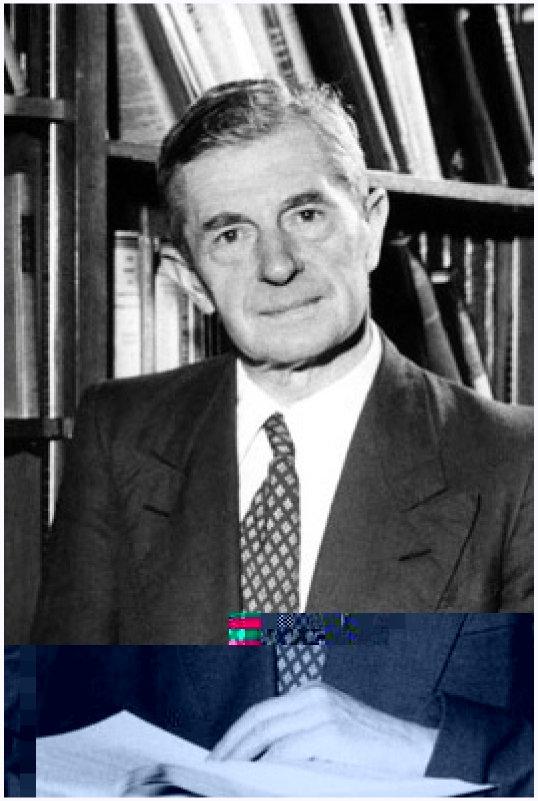
(1)

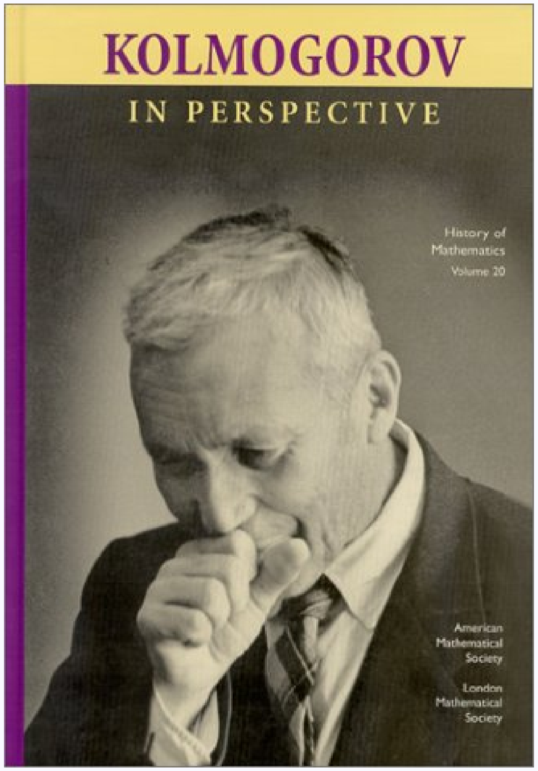
$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k 2 S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \qquad (7.1.6)$$

(2)

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \quad \mathbf{P}^{(n \quad 1)} = \mathbf{P} \quad \mathbf{P} \quad \mathbf{P}^{(n \quad 2)} = \qquad = \mathbf{P}^{n} \qquad (7.1.7)$$

证明:




KOLMOGOROV
IN PERSPECTIVE
History of
Mathematics
Volume 20
American
Mathematical
Society
London
Mathematical
Society

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} &= P\,f\,X_{m+n} = j j X_0 = ig \\
&= \frac{P\,f\,X_{m+n} = j;\,X_0 = ig}{P\,f\,X_0 = ig} \\
&= \sum_{k2S} \frac{P\,f\,X_{m+n} = j;\,X_m = k;\,X_0 = ig}{P\,f\,X_0 = ig} \quad \text{(全概率公式)} \\
&= \sum_{k2S} \frac{P\,f\,X_{m+n} = j;\,X_m = k;\,X_0 = ig}{P\,f\,X_0 = ig} \frac{P\,f\,X_m = k;\,X_0 = ig}{P\,f\,X_m = k;\,X_0 = ig} \\
&= \sum_{k2S} P\,f\,X_{m+n} = j j X_m = k;\,X_0 = igP\,f\,X_m = k j X_0 = ig \\
&= \sum_{k2S} p_{kj}^{(n)} \quad p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k2S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}
\end{aligned}
$$

(2)是(1) 矩阵形式，利用矩阵乘法易 .

例 7.1.12 例7.1.6中，$n = 3; p = q = \frac{1}{2}$.赌博者从2元赌金开©赌博，求解他经过4次赌博之后Ñ光的概率.

解：这个概率为$p_{20}^{(4)} = P f X_4 = 0 j X_0 = 2g$，一步转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法得

$$\mathbf{P}^{(4)} = \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故$p_{20}^{(4)} = \frac{5}{16}$($P^{(4)}$中第3行第1列).

例 7.1.13 甲乙两人进行某种比赛， 每局甲‘的概率´p，乙‘的概率´q，和局的概率´r，$p+q+r=1$. 每局比赛后，‘者记“+1”分，负者记“-1”分，和局不记分，且当两人中有一人获得2分ž结å比赛. 以X_n表«比赛至第n局ž甲获得的分ê，则$fX_n; n=0;1;2;\quad g$为ž齐Markov链，求在甲获得1分的情况下，不超过两局可结å比赛的概率.

解： $fX_n; n=0;1;2;\quad g$的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ q\,r\,p\,0\,0 \\ 0\,q\,r\,p\,0 \\ 0\,0\,q\,r\,p \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

两步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}\quad\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+rq & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\ q^2 & 2rq & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\ 0 & q^2 & 2qr & r^2+pq & p+pr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故在甲获得1分的情况下，不超过两局可结 å 比赛的概率为

$$p^{(2)}_{1;2} + p^{(2)}_{1;\ \ 2} = p + pr$$

例 7.1.14 质点在ê轴上的点集$f\quad 2;\quad 1;0;1;2g$上做随机游动.质点到达点-2后，以概率1　留在原处；到达点2后，以概率1向左移动一点；到达其它点后，分别以概率$\frac{1}{3}$向左、向右移动一点，以概率$\frac{1}{3}$　留在原处.Á求在已知该质点处于状　0的　件下，经三步转移后仍处于状　0的概率.

解：一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

三步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{27} \end{pmatrix}$$

即在已知处于状 0的 件下，经三步转移后仍处于状 0的概率为$\frac{7}{27}$.(转移矩阵中的 部分与最终要计算的结果无关，故Ž略计算)

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 7.1.15 (广告效益的 算)某种啤酒A的广告改变了广告方ª，经调查发现买A种啤酒及另外三种啤酒B,C,D的顾客每两个月的平均转换率如下(½场中只有这四种啤酒):

$$
\begin{array}{llllll}
A & ! & A(0{:}95) & B(0{:}02) & C(0{:}02) & D(0{:}01) \\
B & ! & A(0{:}30) & B(0{:}60) & C(0{:}06) & D(0{:}04) \\
C & ! & A(0{:}02) & B(0{:}01) & C(0{:}07) & D(0{:}00) \\
D & ! & A(0{:}20) & B(0{:}20) & C(0{:}10) & D(0{:}50)
\end{array}
$$

假 目前购买A,B,C,D四种啤酒的顾客的分布为$(25\%; 30\%; 35\%; 10\%)$，Á求半年后啤酒A的½场份额.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

解：令$\mathbf{P}$为转移矩阵，则显然有

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0:95 & 0:02 & 0:02 & 0:01 \\ 0:30 & 0:60 & 0:06 & 0:04 \\ 0:20 & 0:10 & 0:70 & 0:00 \\ 0:20 & 0:20 & 0:10 & 0:50 \end{pmatrix}$$

令

$$= (\ _1;\ \ _2;\ \ _3;\ \ _4) = (0:25; 0:30; 0:35; 0:10)$$

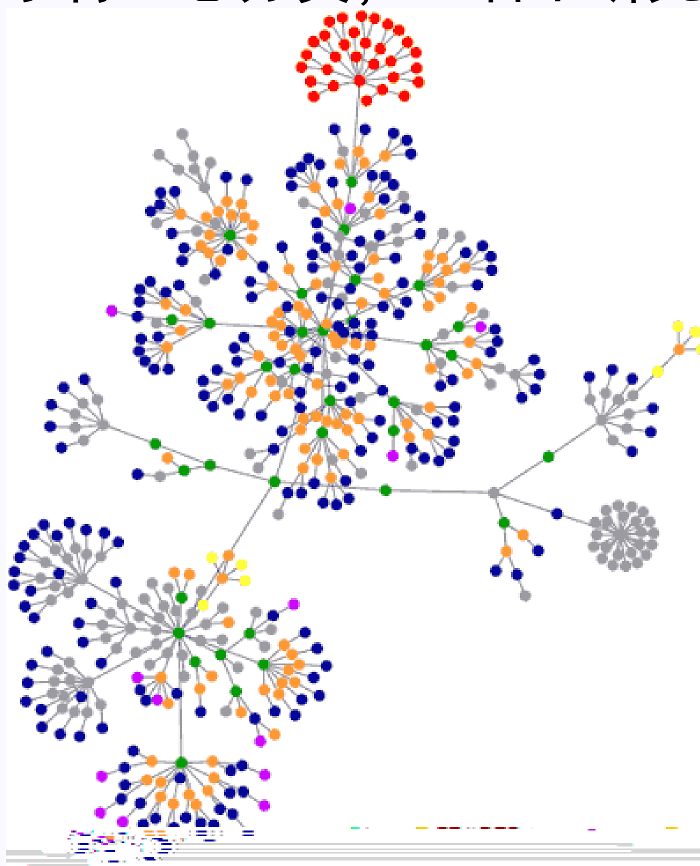
计算经过半年后顾客在这四种啤酒上的转移概率$\mathbf{P}^3$,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0:9145 & 0:035 & 0:0352 & 0:0153 \\ 0:485 & 0:38 & 0:088 & 0:047 \\ 0:36 & 0:134 & 0:5 & 0:006 \\ 0:37 & 0:234 & 0:136 & 0:26 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \left(\begin{array}{l} 0.8894 \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

x7.2　　态　分类及性质

本节　们首先来讨论一下Markov链各个　态之间　'系，并以这些 ' 系将　态分类，　后来研究它们　性质.



½义 7.2.1 称状 i可达状 $j(i; j\ 2\ S)$，若存在n 0 ¦ 得$p_{ij}^{(n)} > 0$，记为 $i\ !\ j$. 若 ž有$j\ !\ i$，则称i与j互 ，记为 $i\ \$\ j$.

½理 7.2.2 互通是一种 价关系，即满足：

(1) 自返性：$i\ \$\ i$;

(2) 性：$i\ \$\ j$，则$j\ \$\ i$;

(3) 性：$i\ \$\ j; j\ \$\ k$，则$i\ \$\ k$.

证明：从互通 ½义可知(1)(2)是显然 ,只证(3).

由互通½义可知需证$i\ !\ k$且$k\ !\ j$. 首先，由$i\ !\ j;\ j\ !\ k$知 存在$m; n\ \ 0$，使 $p_{ij}^{(m)} > 0; p_{jk}^{(n)} > 0$.再由C-K方程知 $p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l2S} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)}\ \ p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$， $i\ !\ k$.同理可证$k\ !\ i$，即有$i\ \$\ k$. ▮

们把任Û两个互通 态8 一类，由上述½理可知，同在一类 态应该Ñ是互通 ，并且任Û一个 态不能同时属于两个不同 类.

½义 7.2.3 若Markov链只 在一个类，Ò 它是不约 ；否则 为 约 .

27 / 71

k◀ ▶k

◀ ▶

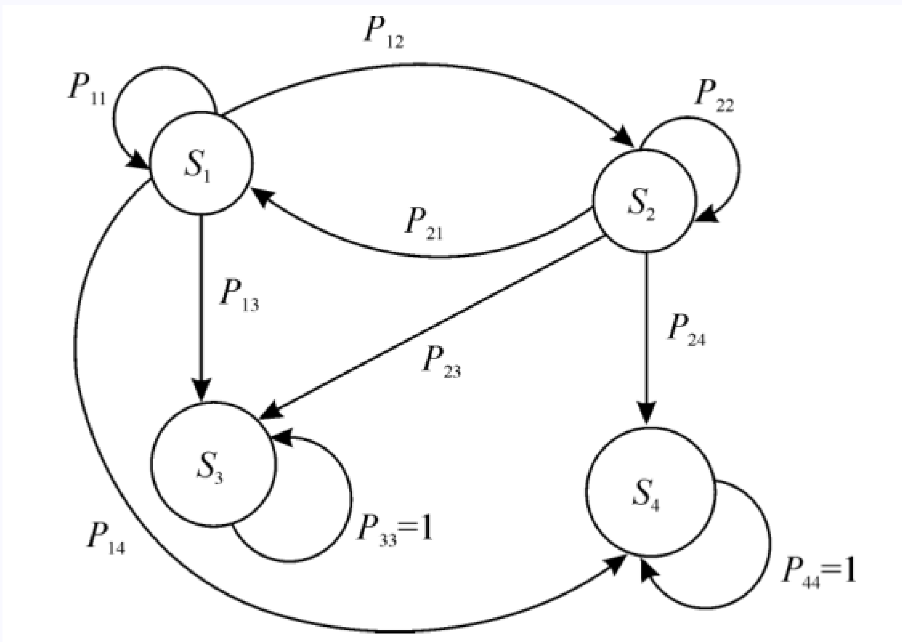
GoBack

FullScreen

Close

Quit

例 7.2.4 我们来看例7.1.5中疾病死亡模型的四个状 之间的关.为清楚起见，经常以 5-2所 « 的转移 来表 « Markov链的状 变化.由转移矩阵容易看出：S_1 ! $S_1; S_2$! $S_1; S_1$! $S_2; S_2$! $S_2; S_1$! $S_3; S_2$! $S_3; S_1$! $S_4; S_2$! S_4. 所以只有S_1 \$ S_2，但S_3 6! $S_1; S_4$ 6! $S_1; S_3$ 6! $S_2; S_4$ 6! $S_2; S_3$ 6! $S_4; S_4$ 6! S_3. 状 可分为三类$fS_1; S_2g$, fS_3g和fS_4g.



28 / 71
5-2 例7.2.4 «
GoBack
FullScreen
Close
Quit

可用类似 方法来说明Ù徒输1 题中任Û两个态$i;j\,(0 < i;j < n)$ Ñ互通，并可将所有 态分 三类：$f0g$, $f1;2;\quad;n\quad 1g$, fng.

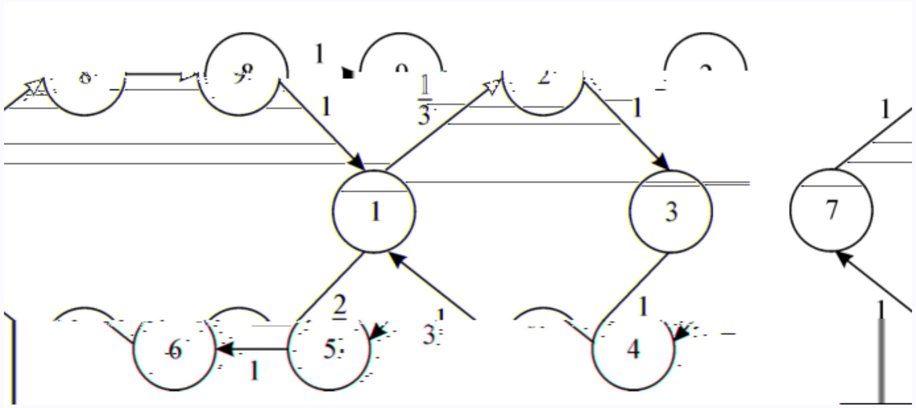
下面 们给出 态 一些性质，然后证明同在一类态具有相同 性质.

½义 7.2.5 若集合$fn : n \quad 1; p_{ii}^{(n)} > 0g$非空，则称它的最大公约 ê $d = d(i)$为状 i的 **周期**.若$d > 1$，称i ´ **周期的**；若$d = 1$，称i ´ **非周期的**.并 别规定上 ã 集合为空集 ž，称i的周期为无穷大.

：由½义7.2.5知 ，虽然i有周 d， 并不是 é 所有 $n; p_{ii}^{(nd)}$ Ñ 大于0.

如 J 集 Ü $fn : n \quad 1; p_{ii}^{(n)} > 0g \quad f4; 6; 8; 12; \quad g$， 大公约数$d = 2$，即2是$i$ 周 ，显然， $n = 2$ Ñ 不属于此集 Ü，即$p_{ii}^{(2)} = 0$. 是可以证明，在正常返 情况下， n充分大之后一½有 $p_{ii}^{(dn)} > 0$.

例 7.2.6 考察如 5-3所« 的Markov链.



例7.2.6图示

由 态1出发再回 态1 可能步长 $T = f4; 6; 8; 10;$ g, 它 大公约数是2，虽然从 态1出发2步并不能回 态1， 们仍然称2是 态1 周 .

½理 7.2.7 若状态$i; j$同属一类，则$d(i) = d(j)$.

证明：由类 ½义知i $ j，即存在$m; n$ 0，使$p_{ij}^{(m)} > 0; p_{ji}^{(n)} > 0$，则$p_{ii}^{(m+n)} = \sum_{k2S} p_{ik}^{(m)} p_{ki}^{(n)} \quad p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$. é所有使 $p_{jj}^{(s)} > 0$ s,有 $p_{ii}^{(n+s+m)} \quad p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(s)} p_{ji}^{(n)} > 0$. 显然$d(i)$应同时整除 $n + m$ Ú $n + m + s$，则它必½整除s.而$d(j)$是j 周 ，所以也有$d(i)$整除$d(j)$. 反L来也可证明$d(j)$整除$d(i)$，于是$d(i) = d(j)$. ∎

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

常返性

½义 7.2.8 对于任何状 i, j，以 $f_{ij}^{(n)}$ 记从 i 出发经 n 步后Ä次到达 j 的概率，则有

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \cdots, n-1 \mid X_0 = i\}, n \geq 1$$

$$f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases} \qquad (7.2.1)$$

令

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

若 $f_{jj} = 1$，称状 j 为**常返状**；若 $f_{jj} < 1$，称状 j 为**非常返状**或**瞬过状**.

们来看f_{ij} ¹ 义.容易看出集Ü $A_n = f X_n = j; X_k \neq j; k = 1; 2; \quad ; n \quad 1 j X_0 = i g$，在$n$不同时是不相交 ，并且$[_{n=1}^{1} A_n$表示 有一个$n$使 L 程从$i$经$n$步后可 达$j$，所以

$$P(\bigcup_{n=1}^{1} A_n) = \sum_{n=1}^{1} P(A_n) = \sum_{n=1}^{1} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}$$

即表示从i出发，有限步内可以 达j 概率.

则 i 常返 态时，从i出发，在有限步内，L 程将以概率1重新返回i；而 i 非常返 态时，L 程以概率$1 \quad f_{ii} > 0$不再回 i，换言之，从i滑 L 了.

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

é于常返 态i，½义

$$_i = \sum_{n=1}^{1} n f_{ii}^{(n)}$$

可以知 $_i$表示 是由i出发再返回 i所需 均步数(时间).

½义 7.2.9 于 返状态i，若 $_i < +1$，则 i为正返状态；若 $_i = +1$，则 i为零 返状态.

例 7.2.10 Markov链的状 空间为$S = f1;2;3;4g$，其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Á将状 进行分类.

解：由一步转移概率矩阵$\mathbf{P}$，对一切$n \quad 1$，$f_{44}^{(n)} = 0$，从而$f_{44} = \sum_{n=1}^{1} f_{44}^{(n)} = 0 < 1$，故状 4´非常返 .

又$f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3}$，$f_{33}^{(n)} = 0(n \quad 2)$，从而$f_{33} = \sum_{n=1}^{1} f_{33}^{(n)} = \frac{2}{3} < 1$，故状 3´非常返 .

但状　1与2´ 常返　，因为

$$f_{11} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f_{22} = \sum_{n=1}^{1} f_{22}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \qquad = 1$$

又因为

$$_1 = \sum_{n=1}^{1} n f_{11}^{(n)} = 1 \ \ \frac{1}{2} + 2 \ \ \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \ 1$$

$$_2 = \sum_{n=1}^{1} n f_{22}^{(n)} = 1 \ \ 0 + 2 \ \ \frac{1}{2} + 3 \ \ \frac{1}{2^2} + \qquad + n \ \ \frac{1}{2^{n \ \ 1}} = 3 < \ 1$$

故状　1与2都´ 正常返状　，又因其周期都´ 1，故它们都´ 遍历　.

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

们可以证明，é 于同属一类 态$i; j$,它们同 常返 态或非常返 态，并且 它们是常返 态时，又同 正常返 态 Ú 零常返 态.以下 们首先引入常返性 另一个齐½方法.

½ 理 7.2.11 状态i为 返 且 = $\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} = 1$；

状态i为非 返状态时有 $\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 \quad f_{ii}}$.

在证明½理之前， 们需要下面 引理，它给出了 移概率$p_{ij}^{(n)}$ 与首达概率$f_{ij}^{(n)}$ ' 系.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

引理 7.2.12 任意状态$i;j$及$1 \quad n < +1$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{q=1}^{n} f_{ij}^{(q)} p_{jj}^{(n \quad q)} \tag{7.2.2}$$

证明：用8纳法. é $n = 1;2$，由$p_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}$，易证上式成立.

假设é $n \quad 1$，已有 $p_{ij}^{(n \quad 1)} = \sum_{q=1}^{n \quad 1} f_{ij}^{(q)} p_{jj}^{(n \quad 1 \quad q)}$成立.

é n用C-K方程，有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k\in S} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)} = p_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{\substack{k\neq j\\ k\in S}} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{\substack{k\neq j\\ k\in S}} f_{ik}^{(1)}\Big(\sum_{q=1}^{n-1} f_{kj}^{(q)}p_{jj}^{(n-1-q)}\Big) \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{q=1}^{n-1}\Big(\sum_{\substack{k\neq j\\ k\in S}} f_{ik}^{(1)}f_{kj}^{(q)}\Big)p_{jj}^{(n-1-q)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{q=1}^{n-1} f_{ij}^{(1+q)}p_{jj}^{(n-1-q)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{q=2}^{n} f_{ij}^{(q)}p_{jj}^{(n-q)} \\
&= \sum_{q=1}^{n} f_{ij}^{(q)}p_{jj}^{(n-q)}
\end{aligned}
$$

证明中　们用　了　式$f_{ij}^{(q+1)} = \sum_{k \neq j} f_{ik}^{(1)} f_{kj}^{(q)}$，请ö者行证之．现在　们就可以é ½理7.2.11给出证明了．

½理7.2.11之证明： 用引理7.2.12，有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} &= p_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{1} \Big(\sum_{q=1}^{n} f_{ii}^{(q)} p_{ii}^{(n\quad q)} \Big) \\
&= 1 + \sum_{q=1}^{1} \sum_{n=q}^{1} f_{ii}^{(q)} p_{ii}^{(n\quad q)} \\
&= 1 + \Big(\sum_{q=1}^{1} f_{ii}^{(q)} \Big) \Big(\sum_{m=0}^{1} p_{ii}^{(m)} \Big)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 \quad f_{ii}}
$$

从而

$$\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} < 1 \quad ( ) \quad f_{ii} < 1; \quad \sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} = 1 \quad ( ) \quad f_{ii} = 1:$$

∎

引理 7.2.13 若$i \ \$ \ j$且$i$为 返状态，则$f_{ji} = 1$.

证明：假如$f_{ji} < 1$，则以正概率$1 \quad f_{ji} > 0$使 从j出发不能在有限步内回 i.这意 系统中存在 一个正概率，使 它从i出发不能在有限步内回 i，从而$f_{ii} < 1$,与假设i是常返 态相矛ñ.所以只能有$f_{ji} = 1$.

½理 7.2.14　返性是一个类性质.

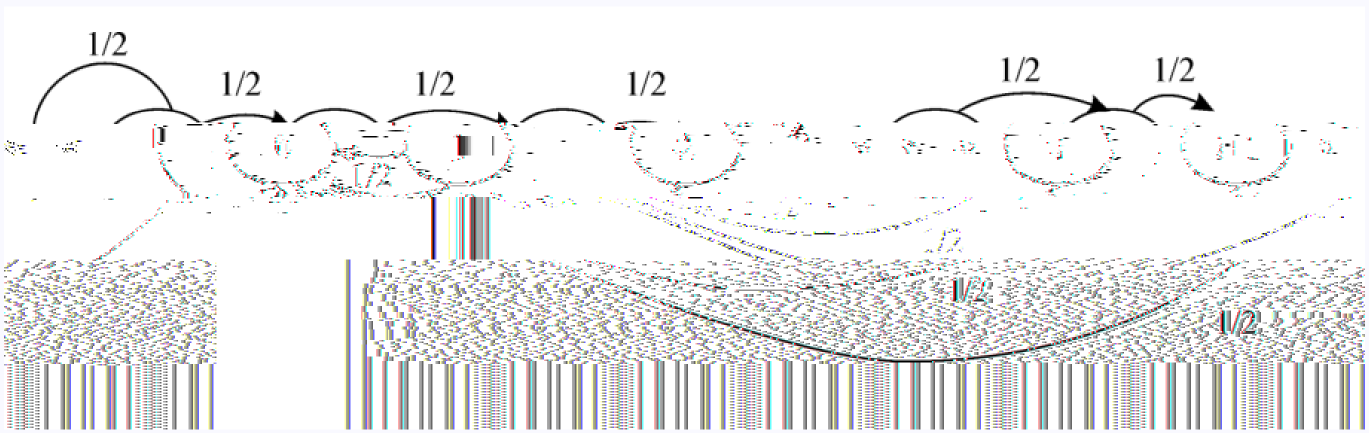
证明:

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

可见，$\sum_{l=0}^{1} p_{jj}^{(l)}; \sum_{l=0}^{1} p_{ii}^{(l)}$相互控制，同 穷或有限，从而$i; j$同 常返或非常返 态.

次 们还可以证明， $i; j$同 常返 态时，它们同 正常返 态或零常返 态. 证明将在下一节给出.

例 7.2.15 Markov链的状 空间$S = f0;1;2; \quad g$, 转移概率为 $p_{00} = \frac{1}{2}; p_{i;i+1} = \frac{1}{2}; p_{i0} = \frac{1}{2}; i \ 2 \ S$. 由 5-4易知, $f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}; f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}; f_{00}^{(3)} = \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}; \quad ; f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2^n}$, 故$f_{00} = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{2^n} = 1; \ _0 = \sum_{n=1}^{1} n2^{\ n} < 1$. 可见状 0´ 正常返状 的，显然它´非周期的，故0´遍历 .对其他状 $i > 0$，由$i \ \$ \ 0$, 故$i$也´遍历的.



k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 7.2.16 考虑直线上无限制的随机游动，状 空间为$S = f0; \quad 1; \quad 2; \quad g$，转移概率为 $p_{i;i+1} = 1 \quad p_{i;i \ 1} = p; i \ 2 \ S$. 对于状 0，可知$p_{00}^{(2n+1)} = 0; n = 1; 2;$ ，即从0出发奇ê次不可能返回到0. 而

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1 \quad p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!}[p(1 \quad p)]^n$$

即经过偶ê次回到0 当且仅当它向左、右移动距离相 .

由Stirling 公ª知，当n充分大ž，$n! \quad n^{n+\frac{1}{2}}e^{\ n} p\overline{2}$，则$p_{00}^{(2n)} \quad \frac{[4p(1 \quad p)]^n}{p\overline{n}}$. 而$p(1 \quad p) \quad \frac{1}{4}$且$p(1 \quad p) = \frac{1}{4}$ ( ) $p = \frac{1}{2}$. 于´ $p = \frac{1}{2}$ž，$\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} = 1$，否则 $\sum_{n=0}^{1} p_{ii}^{(n)} < 1$，即当$p \ 6= \frac{1}{2}$ ž 状 0´瞬过状 ，$p = \frac{1}{2}$ž´常返状 .

思考：回到0点平均步ê？？？？

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

x7.3　极限½理及　　分布

x7.3.1　极限½理

对于一个系　来说，考虑它的长期的性质´很必要的，本节我们将研究Markov链的极限情况和平稳Markov链的有关性质. Ä先来看两个例子.

例 7.3.1　Markov链的转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & p & p \\ & q & 1 & q \end{pmatrix}; \quad 0 < p; q < 1$$

现在考虑$\mathbf{P}^{(n)}$当n ! 1 ž的情况.由$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$知，只需计算$\mathbf{P}$的$n$重乘积的极限.令

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0\,1 & p & q \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\\ -\frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q}\end{pmatrix};\qquad \mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$$

从而

$$\mathbf{P}^n=(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1})^n=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{pmatrix}^n\mathbf{Q}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{q+p(1-p-q)^n}{p+q} & \frac{p-p(1-p-q)^n}{p+q}\\ \frac{q-q(1-p-q)^n}{p+q} & \frac{p+q(1-p-q)^n}{p+q}\end{pmatrix}\qquad(7.3.1)$$

由于$|1-p-q|<1$，(7.3.1) a 的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n=\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{pmatrix}$$

可见此Markov链的n步转移概率有一个稳定的极限.

例 7.3.2 在例7.2.16中令$p=\frac{1}{3}$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3})^n}{\sqrt{\pi n}} = 0 \tag{7.3.2}$$

令$p=\frac{1}{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})^n}{\sqrt{\pi n}} = 0 \tag{7.3.3}$$

由(7.3.2)和(7.3.3) ª 知道，从零出发经过无穷次的转移之后，系　在某一规定 ž 刻回到0的概率趋于0.

我们容易证明例7.3.1 中所有状 ´ 正常返状 ，而例7.2.16中当$p=\frac{1}{3}$ ž 状 0 ´ 非常返状 ，当$p=\frac{1}{2}$ ž，0 ´ 零常返状 .那么两个例子给出的´不´一般结论呢?答案´肯定的，我们不加证明地引入Markov链的一个基本极限定理.

½理 7.3.3 若状态i是周期为d 返状态，则

$$\lim_{n\,!\,1} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\ _i} \tag{7.3.4}$$

$_i = 1$ 时，$\frac{d}{\ _i} = 0$.

注：在定理7.3.3中只 到i´常返状 的情形.当i´非常返状 ž，由于$\sum_{n=1}^{1} p_{ii}^{(n)} < 1$，易见$\lim_{n\,!\,1} p_{ii}^{(n)} = 0$.

由定理7.3.3, 我们有以下　论.

推论 7.3.4 设i为　返状态，则

$$i\text{为零　返状态}\quad(\ )\quad \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

证明：若i为零常返状　，则 $_{i} = \infty$, 从而$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$.而当$m$不´$d$的整ê倍ž, $p_{ii}^{(m)} = 0$，故$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

反之若$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.　i为正常返状　，则 $_{i} < \infty$，由定理7.3.3知$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} > 0$，矛盾. ∎

利用　论7.3.4，我们把定理7.2.14的第二部分补充证明如下:

证明(定理7.2.14)　　$i \leftrightarrow j$为常返状　且i为零常返状　，则

$$p_{ii}^{(n)} \to 0$$

考虑到

$$p_{ii}^{(n+m+l)} \quad p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(m)} p_{ji}^{(l)} \quad 0 \tag{7.3.5}$$

令$m \to \infty$, 对(7.3.5) ª 取极限，知

$$0 \quad \lim_{m \to \infty} p_{jj}^{(m)} \quad 0$$

故j也为零常返状　. 反之由j为零常返状　也可　得i为零常返状　，从而证明了$i; j$　为零常返状　或正常返状　. ∎

x7.3.2 分布与极限分布

前面我们只 论了Markov 链的转移概率p_{ij}的有关问 ，下面我们将就它的初©分布的问 给出一些结论. Ä先 ´关于Markov链的平稳分布和极限分布的概念.

½义 7.3.5 对于Markov链，概率分布$f \;_j ; j \; 2 \; Sg$称为平稳分布，若

$$_j = \sum_{i2S} \;_i p_{ij} \qquad (7.3.6)$$

可见，若Markov链的初©分布$PfX_0 = jg = \;_j$´平稳分布，则X_1的分布将´

$$\begin{aligned} PfX_1 = jg &= \sum_{i2S} PfX_1 = jjX_0 = ig \; PfX_0 = ig \\ &= \sum_{i2S} p_{ij} \;_i = \;_j: \end{aligned}$$

这与X_0的分布´相 的，依次递 $X_n; n = 0; 1; 2; 3;$ 将有相 的分布，这也´为Ÿ么称$f \ _i; i\ 2\ Sg$为平稳分布的原因.

½义 7.3.6 称Markov链´**遍历 (Ergodic)** 的，如果所有状 相 且均´周期为1的正常返状 . 对于遍历的Markov链,极限

$$\lim_{n\ !\ 1} p_{ij}^{(n)} = \ _j; \quad j\ 2\ S \qquad (7.3.7)$$

称为Markov链的**极限分布**.

由定理**??**知， $\ _j = \frac{1}{\ _j}$.

下面的定理说明对于不可约遍历的Markov链，极限分布就´平稳分布并且还´唯一的平稳分布.

½理 7.3.7 于不 周期 Markov链

(1)若它是遍历 ，则 $j = \lim_{n ! 1} p_{ij}^{(n)} >$ $2\ S)$是平稳分布且是唯一 平稳分布；

(2)若状态 是瞬过 或全为L □

[redacted] $n\ !\ 1$ (n) [redacted]

两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k\in S} (\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)}) p_{kj}$$

即 $\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}$, 从而$\{\pi_j; j\in S\}$ ´ 平稳分布.

再证$\{\pi_j; j\in S\}$ ´ 唯一的平稳分布. 假 另外还有一个平稳分布$\{\tilde{\pi}_j; j\in S\}$, 则由$\tilde{\pi}_j = \sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k p_{kj}$归纳得到

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k p_{kj}^{(n)}; \quad n = 1; 2; \qquad (7.3.9)$$

令$n\to\infty$，对(7.3.9) ª 两端取极限,有

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k \lim_{n\to\infty} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k \pi_j$$

因为$\sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k = 1$，所以$\tilde{\pi}_j = \pi_j$, 得证平稳分布唯一.

UIBE

1951

例 7.3.8 Markov链的转移阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

则它的平稳分布满足

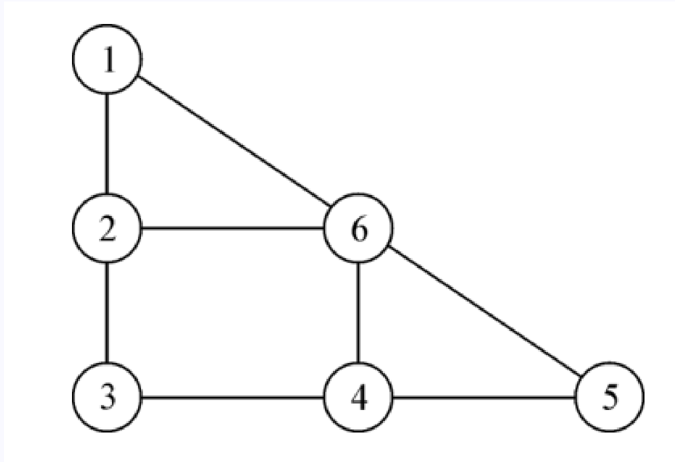
$$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_3 \\ \pi_3 = 0.5\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3. \end{cases}$$

求解 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j | X_0 = i\} = \frac{1}{3}$$

即0时刻从i出发在很久的时间之后Markov链处于状态$1, 2, 3$的概率均为$\frac{1}{3}$，即X_n的极限分布为均匀分布.

例 7.3.9 有6个车站,车站中间的公路连接情况如5-6所«.



例7.3.9 «

汽车每 可以从一个站¨向与之直接相临的车站，并在夜晚到达车站留宿，次日凌晨重复相 的活动. 每 凌晨汽车开往临近的任何一个车站都´等可能的，Á说明很长ž间后，各站每晚留宿的汽车比例趋于稳定.求出这个比例以便正确地 置各站的服务规模.

解：以$fX_n; n = 0; 1; \quad g$记第n 某辆汽车留宿的车站

号.这´一个Makov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

解方程

$$\begin{cases} \quad \mathbf{P} \quad = \\ \sum_{i=1}^{6} \quad {}_i = 1 \end{cases}$$

其中 $= (\ {}_1; \ {}_2; \ {}_3; \ {}_4; \ {}_5; \ {}_6)$, 可得 $= (\frac{1}{8}; \frac{3}{16}; \frac{1}{8}; \frac{3}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4})$.
从而无论开©汽车从哪一个车站出发在很长ž间后他在任一个车站留宿的概率都´固定的，从而所有的汽车也将以一个稳定的比例在各车站留宿.

例 7.3.10 甲袋中有k个白球和1个黑球，乙袋中有$k+1$个白球，每次从两袋中各任取一球，交换后放入对方的袋中.证明经过n次交换后，黑球仍在甲袋中的概率p_n满足$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{2}$.

解：以X_n表«第n次取球后甲袋中的黑球ê，则$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$´状 空间为$S=\{0,1\}$的ž齐Markov链，一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\frac{k}{k+1} & \frac{1}{k+1}\\ \frac{1}{k+1} & \frac{k}{k+1}\end{pmatrix}$$

则它的平稳分布满足

$$\begin{cases}\pi_0=\frac{k}{k+1}\pi_0+\frac{1}{k+1}\pi_1\\ \pi_1=\frac{1}{k+1}\pi_0+\frac{k}{k+1}\pi_1\end{cases}$$

且有$\pi_0+\pi_1=1$，

求解得 $=(\ _0;\ _1)=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$，故经过$n$次交换后，黑球仍在甲袋中的概率$p_n$满足

$$\lim_{n!1} p_n = \lim_{n!1} P f X_n = 1g = \ _1 = \frac{1}{2}$$

例 7.3.11 我国某种商品在国外销售情 共有连续24个季 数 â (其中1表示 销，2表示滞销)：

1,1,2,1,2,2,1,1,1,2,1,2,1,1,2,2,1,1,2,1,2,1,1,1

如果该商品销售情 C 似满足时齐性与Markov性.

(1)试确 销售状态 一步转移概率 Ý 阵.

(2)如果现在是 销，试预测这之后 四个季 销售状 .

(3)如果影响销售 所有因素不变，试预测 期 销售状 .

）：以X_n表示　n季　该种商品在国外　销售情　，
则$f X_n; n = 1; 2;$　g是一状态　间为$f1; 2g$　时齐Markov链.

(1)由1　!　1有7　；由1　!　2有7　，　$p_{11} = p_{12} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}:$

由2　!　1有7　；由2　!　2有7　，　$p_{21} = \frac{7}{9}; p_{22} = \frac{2}{9}:$

一步转移概率Ý阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{P}^{(4)} = \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0{:}611 & 0{:}389 \\ 0{:}605 & 0{:}395 \end{pmatrix}$$

$$p_{11}^{(4)} = 0{:}611 > p_{12}^{(4)} = 0{:}389$$

即如果现在是　销，这之后　四个季　该种商品将以概率0.611　销.

(3)由平稳方 $({}_1; {}_2) = ({}_1; {}_2)$**P**及规范性条件 ${}_1 + {}_2 = 1$

$$\begin{cases} {}_1 & = \frac{1}{2}\ {}_1 + \frac{7}{9}\ {}_2 \\ {}_2 & = \frac{1}{2}\ {}_1 + \frac{2}{9}\ {}_2 \\ {}_1 + {}_2 & = 1 \end{cases}$$

) $= ({}_1; {}_2) = (\frac{14}{23}; \frac{9}{23})$.

即 期下去，该种商品将以$\frac{14}{23}$ 概率 销.

x7.4 连续时间Markov链(了解，选ö)

x7.4.1 连续时间Markov链

前面几节 论的´ž间和状 空间都´离散的Markov过程，本节我们将介 另外一种情况的Markov过程，它的状 空间仍然´离散的，但ž间´连续变化的，称为连续ž间Markov链. 我们会给出它的一些性质，一个重要的方程(Kolmogrov方程)和一个重要的应用( ) 灭过程).

½义 7.4.1 过程$\{X(t), t \geq 0\}$的状 空间S为离散空间，为方便ö写 S为$\{0, 1, 2, \cdots\}$或其子集. 若对一切$s, t \geq 0$及$i, j \in S$,有

$$P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\}$$

$$= P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} \qquad (7.4.1)$$

成立，则称$\{X(t), t \geq 0\}$´一个连续ž间**Markov**链.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

件概率$P f X(t+s) = j j X(s) = i g$记作$p_{ij}(s; t)$，表«过程在ž刻$s$处于状 i，经tž间后转移到j的转移概率，并称$\mathbf{P}(s; t) = (p_{ij}(s; t))$为相应的转移概率矩阵.

½义 7.4.2 称连续ž间Markov链´ž齐的，若$p_{ij}(s; t)$与s无关.简记$p_{ij}(s; t) = p_{ij}(t)$，相应地记$\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$.

我们只 论ž齐的连续ž间Markov链，并且简称为连续ž间Markov链(在不引起混淆的情况下有ž也称为Markov链).

x7.4.2 Kolmogorov 分方程

对于离散ž间Markov链，如果已知其转移概率矩阵$\mathbf{P} = (p_{ij})$，则其n步转移概率矩阵由其一步转移矩阵的n次方可得.但´对于连续ž间Markov链，转移概率$p_{ij}(t)$的求解一般比较复杂.下面我们先考虑$p_{ij}(t)$的一些性质.

½理 7.4.3 时齐连续时间Markov链 转移概率$p_{ij}(t)$满足:

(1)$p_{ij}(t) \quad 0$;

(2)$\sum_{j 2 S} p_{ij}(t) = 1$;

(3)$p_{ij}(t+s) = \sum_{k 2 S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)$.

证明：(1)和(2)由$p_{ij}(t)$的定义易知.

下面证明(3)：

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t+s) &= P\{X(t+s)=j \mid X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X(t+s)=j; X(t)=k \mid X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X(t+s)=j \mid X(t)=k; X(0)=i\} P\{X(t)=k \mid X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in S} P\{X(t+s)=j \mid X(t)=k\} p_{ik}(t) \\
&= \sum_{k\in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s)
\end{aligned}
$$

一般称(3)为连续 ž 间Markov链的C-K方程.

½理 7.4.4 (1)

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = q_{ii} \le +\infty \qquad (7.4.2)$$

(2)

$$\lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ij} < \infty \qquad (7.4.3)$$

称q_{ij}为从状 i转移到j的转移速率.

推论 7.4.5 有限状态时齐 连续时间Markov链, 有

$$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij} < +\infty \qquad (7.4.4)$$

证明：由定理7.4.3知，$\sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1$，即

$$1 - p_{ii}(t) = \sum_{j\neq i} p_{ij}(t)$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} &= \lim_{t\to 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} \\
&= \sum_{j\neq i}\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t} \\
&= \sum_{j\neq i} q_{ij} < +\infty
\end{aligned}$$

∎

GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 7.4.6 (Poisson过程)由Poisson过程的第二个定义知

$$
\begin{aligned}
p_{k;k+1}(h) &= P\, f N(t+h) \quad N(t) = 1 j N(t) = kg \\
&= \quad h + o(h) \\
p_{k;k}(h) &= P\, f N(t+h) \quad N(t) = 0 j N(t) = kg \\
&= 1 \qquad h + o(h)
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\lim_{h\ !\ 0} \frac{1 \quad p_{kk}(h)}{h} = q_{kk} =
$$

$$
\lim_{h\ !\ 0} \frac{p_{k;k+1}(h)}{h} = q_{k;k+1} =
$$