应用随机过程

Ç ¥ (, 邓军

对　济　大Æ

融Æ院

第8章　随机积分

章的目的´ 入关于Brown运动的积分，讨论其5质 给出在随机分Û及 融Æ中有着重 应用的Itô公ª.

x8.1 关于随机游动的积分

· 从讨论关于简单的随机游动的积分开©. $X_1; X_2;$ ´ 独立的随机 量，$P f X_i = 1 g = P f X_i = \quad 1 g = \frac{1}{2}$，令$S_n$ « 相应的游动

$$S_n = X_1 + X_2 + \quad + X_n$$

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

· 可 这 看这组独立随机 量，X_n • 第n次公平赌的 果($X_n = 1$ • 赢1元，$X_n =$ 1 • Ñ 掉1元). $F_n = (X_1; \quad ; X_n)$(由$f X_i; 1 \quad i \quad n g$) 成的 代 ê)， 可理 • 包含 $X_1; \quad ; X_n$的 & 息.令B_n ´ $F_{n \ 1}$可 的随机量 S 列， 如它 « 第n次赌 ž 所下赌注，则它只能利用第n 1次及 前的 & 息，而 能利用第n次赌 的 果.于 ´ 到 ž 刻n的 Â Z_n •

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} B_i X_i = \sum_{i=1}^{n} B_i(S_i \quad S_{i \ 1}) = \sum_{i=1}^{n} B_i \Delta S_i$$

这里$\Delta S_i = S_i \quad S_{i \ 1}$; $S_0 = 0$. · 称Z_n • B_n关于S_n的积分.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

容　看出$\{Z_n\}$´ 关于F_n的鞅，即对于所有的n

$$E[Z_{n+1}|F_n]=Z_n$$

特　地，$E[Z_n]=0$. 此　，如果假定$E[B_n^2] < 1$，则

$$Var[Z_n]=E[Z_n^2]=\sum_{i=1}^{n}E[B_i^2]$$

一 ¢ 上，

$$Z_n^2=\sum_{i=1}^{n}B_i^2X_i^2+2\sum_{1\ \ i<j\ \ n}B_iB_jX_iX_j$$

再注　到$X_i^2=1$，如果$i<j$，则$B_i; X_i; B_j$都 ´ $F_{j\ \ 1}$可的，且X_j独立于$F_{j\ \ 1}$，得

$$E[B_iB_jX_iX_j]=E[E[B_iB_jX_iX_j|F_{j\ \ 1}]]=E[B_iB_jX_iE(X_j)]=0$$

x8.2　关于Brown运动的积分

　　定　关于Brown运动的积分$\int_0^T X(t)dB(t)$（或简记• $\int XdB$），这里$\{B(t)\}$´　‘　准Brown运动，有ž记•$\{W_t\}$. Ä先考虑　个非随机的简单过程$\{X(t)\}$，即$X(t)$´　个简单函ê（　赖于$B(t)$）. 由简单函ê的定　，存在$[0;T]$的分割$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$及常ê$c_0;c_1;\cdots;c_{n-1}$，¦得

$$X(t)=\begin{cases} c_0; & \text{如果}t=0 \\ c_i; & \text{如果}t_i<t\le t_{i+1};\ i=0;1;\cdots;n-1 \end{cases}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

或　«•

$$X(t)=c_0 I_0(t)+\sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \tag{8.2.1}$$

于´，可定　其积分•

$$\int_0^T X(t)dB(t)=\sum_{i=0}^{n-1} c_i[B(t_{i+1})-B(t_i)] \tag{8.2.2}$$

由Brown运动的独立增量5可知，公ª(8.2.2)所定　的积分´Gauss分　的随机　量，其　值•0，方差•

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

$$
\begin{aligned}
Var\left(\int X\,dB\right) &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big)\right]^2 \\
&= E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j [B(t_{i+1}) - B(t_i)][B(t_{j+1}) - B(t_j)]\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)
\end{aligned}
$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

用取极限的方法可 将这 定 推广到 般的非随机函ê $X(t)$.但´ · 定 的´随机过程的积分, 此将简单函ê中的常êc_i用随机 量 $_i$来代替, 求 $_i$´F_{t_i}可 的. 这里$F_t = fB(u); 0 \quad u \quad tg$.于´,由Brown运动的鞅5质得

$$E[\ _i(B(t_{i+1}) \quad B(t_i))jF_{t_i}] = \ _iE[B(t_{i+1}) \quad B(t_i)jF_{t_i}] = 0$$

此

$$E[\ _i(B(t_{i+1}) \quad B(t_i))] = 0:$$

k◀ ▶k
◀ ▶
GoBack
FullScreen
Close
Quit

定 8.2.1 设$fX(t); 0 \quad t \quad Tg$是˜个简单随机过程，即存在$[0; T]$的分割$0 = t_0 < t_1 < \quad < t_n = T$，随机C量 $_1; \ _0; \ ; \ _n \ _1$使得 $_1$是常数，$_i$•赖于$fB(t); t \ t_i g$，但ø•赖于$fB(t); t > t_i g$，¿且

$$X(t) = \ _1 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n \ 1} \ _i I_{(t_i; t_{i+1}]}(t) \qquad (8.2.3)$$

此时，**Itô**积分$\int_0^T X dB$定Â为

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n \ 1} \ _i (B(t_{i+1}) \quad B(t_i)) \qquad (8.2.4)$$

简单过程的积分´ 个随机 量，满足下ã 5 质.

(1) **线 5** 如果$X(t); Y(t)$ ´ 简单过程，则

$$\int_0^T (X(t) + Y(t)) dB(t) = \int_0^T X(t) dB(t) + \int_0^T Y(t) dB(t)$$

这里 ; ´ 常ê .

(2)

$$\int_0^T I_{[a;b]}(t) dB(t) = B(b \wedge T) \quad B(a \vee 0)$$

其中$I_{[a;b]}(t)$ ´ 区间$[a; b]$的« 5 函ê , $b \wedge T := \min(b; T);\ a \vee 0 := \max(a; 0)$.

(3) **零 值 5** 如果$E[\ _i] < 1; (i = 0; 1; \quad ; n \quad 1)$，则

$$E[\int_0^T X(t) dB(t)] = 0$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

(4) 等 5 如果$E[\ {}_i^2] < 1;(i = 0;1; \quad ;n \quad 1)$，则

$$E\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right)^2 = \int_0^T E[X^2(t)]dt$$

证 ：5质(1),(2)和(3)´简单的，读者可自1证之，这里只证 5质(4). 利用 Cauchy-Schwarz 等a，得到

$$E[|\ {}_i(B(t_{i+1}) \quad B(t_i))|] \qquad \sqrt{E(\ {}_i^2)E[B(t_{i+1}) \quad B(t_i)]^2} < 1$$

于´

$$Var[\int_0^T XdB] = E\left[\sum_{i=0}^{n\ 1} {}_i(B(t_{i+1})\quad B(t_i))\right]^2$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{n\ 1} {}_i(B(t_{i+1})\quad B(t_i))\sum_{j=0}^{n\ 1} {}_j(B(t_{j+1})\quad B(t_j))\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n\ 1} E[{}_i^2(B(t_{i+1})\quad B(t_i))^2] + 2\sum_{i<j} E[{}_i\ {}_j(B(t_{i+1})\quad B(t_i))(B(t_{j+1})\quad B(t_j))](8.2.5)$$

由Brown运动的独立增量5　及关于 $_i$的假定，利用定理1.5.7(1)，有

$$E[{}_i\ {}_j(B(t_{i+1})\quad B(t_i))(B(t_{j+1})\quad B(t_j))] = 0$$

所 ，a (8.2.5)中的最后 项•零.由Brown运动的鞅5质，得

$$
\begin{aligned}
Var[\int_0^T X dB] &= \sum_{i=0}^{n\ 1} E[\ {}_i^2(B(t_{i+1})\quad B(t_i))^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n\ 1} E\quad E\quad {}_i^2(B(t_{i+1})\quad B(t_i))^2 j F_{t_i} \\
&= \sum_{i=0}^{n\ 1} E\quad {}_i^2 E\quad (B(t_{i+1})\quad B(t_i))^2 j F_{t_i} \\
&= \sum_{i=0}^{n\ 1} E[\ {}_i^2](t_{i+1}\quad t_i) \\
&= \int_0^T E[X^2(t)]dt:
\end{aligned}
$$

∎

有了前 的准 ， · 现在可 将上 ã 随机积分的定

扩展到更 般的可 · 应随机过程类.

g是) $(t)^{t}$ ÿ $\square(X)$ A

定 8.2.2 设 $f X(t); t$ $0g$是随机

GoBack

FullScreen

Close

Quit

· 将随机积分的定 按下ã 骤扩展到$V(0;T)$:

Key Point: 对于$V(0;T)$任 的函ê f，· 希" 找到 个简单随机过程$f\ \ _n g$¦得二者在平方 下 离趋于**0**，即：

$$E[\int_0^T (f \quad _n)^2 dt] \ ! \ 0:$$

Step 1: Ä先，令$h\ 2\ V$有 ， 且对 个$!\ 2\ \Omega$, $h(\ ;\ !)$连 Y.则存在简单过程$f\ \ _n g$，其中

$$_n = \sum_j h(t_j;\ !) \quad 1_{[t_j;t_{j+1})}(t)\ 2\ V$$

¦得当$n\ !\ 1$ ž，对 个$!\ 2\ \Omega$,

$$\int_0^T (h \quad _n)^2 dt\ !\ 0$$

此由有 Â敛定理得$E[\int_0^T (h \quad _n)^2 dt]\ !\ 0.$

Step 2: 其次，令h 2 V有 ，可 证 存在h_n 2 V有 ,且$8!$ 2 $\Omega; 8n$, $h_n(; !)$连Y，¦得

$$E[\int_0^T (h \quad h_n)^2 dt] \; ! \; 0 \tag{8.2.6}$$

Step 3: 最后，对任 的f 2 V，存在有 列g_n 2 V，¦得

$$E[\int_0^T (f(t;!) \quad g_n(t;!))^2 dt] \; ! \; 0 \tag{8.2.7}$$

Step 4: 对于任 f 2 V，· 能够找到Step 1-3中的$g_n; h_n;$ $_n$，¦得

$$E[\int_0^T (f(t;!) \qquad _n(t;!))^2 dt] \quad E[\int_0^T (f(t;!) \quad g_n(t;!))^2 dt]$$
$$+E[\int_0^T (g_n(t;!) \quad h_n(t;!))^2 dt] + E[\int_0^T (h_n(t;!) \qquad _n(t;!))^2 dt]$$
$$! \; 0$$

上 **Step 1 - 3的细** （了 可 ） ¯ ¢ 上,
妨 $jh(t;!)j$ $M;8(t;!)$. 定

$$h_n(t;!) = \int_0^t {}_n(s \quad t)h(s;!)ds$$

这里 $_n$ ´ $\mathbb{R}$上非负连Y函ê，¦得对所有的x 2 ($\frac{1}{n}$;0), $_n(x) = 0$且$\int_1^1 {}_n(x)dx = 1$. 则对 个$!$ 2 Ω, $h_n(;!)$连Y且$jh_n(t;!)j$ M. 由h 2 V可 看出h_n 2 V, 且

当n ! 1 ž, 对 个$!$ 2 Ω,有

$$\int_0^T (h_n(s;!) \quad h(s;!))^2 ds \; ! \; 0$$

此再次利用有 Â敛定理得ª (8.2.6).

GoBack
FullScreen
Close
Quit

上 Step 1 - 3的细

GoBack
FullScreen
Close
Quit

现在，· 可 成Itô积分$\int_0^T f(t)dB(t); f \in V$的定如下.

定 8.2.3 设$f \in V(0;T)$，则f的Itô积分定Â为

$$\int_0^T f(t;\omega)dB_t(w) = \lim_{n \to \infty} \int_0^T \phi_n(t;\omega)dB_t(\omega); (L^2(P)\text{中极限}) \tag{8.2.8}$$

这里$\{\phi_n\}$是初等随机过程的序列，使得当$n \to \infty$时，

$$E \int_0^T (f(t;\omega) - \phi_n(t;\omega))^2 dt \to 0. \tag{8.2.9}$$

注：在¢际¯题中，· 常常遇到的过程 满足V中的可积5条件而 满足下ã的V 中的条件.¯¢上，Itô积分的定 可 推广到更广泛的过程$\{h(s) : s \geq 0\}$类:

$$V = \left\{ h : h \bullet F \cdot \text{应过程，且满足} \int_0^T h^2(s)ds < \infty ; a.s. \right\} :$$

例 8.2.4 设f是连续函数，考虑$\int_0^1 f(B(t))dB(t)$. Ï为$B(t)$有连续的路径，所±$f(B(t))$ • 在$[0;1]$上连续，从而$\int_0^1 f(B(t))dB(t)$有定Â. 然而根据f的ø同，这个积分可±有(或没有)有限的矩. 例如：

(1) 取$f(t)=t$, 则由于$\int_0^1 E[B^2(t)]dt < 1$; $E[\int_0^1 B(t)dB(t)] = 0$ ¿且由性质8.2.1(3) (4)有

$$E\left(\int_0^1 B(t)dB(t)\right)^2 = \int_0^1 E[B^2(t)]dt = \frac{1}{2}$$

(2) 取$f(t)=e^{t^2}$，此时考虑$\int_0^1 e^{B^2(t)}dB(t)$. 虽然积分存在，但由于当$t \quad \frac{1}{4}$时, $E[e^{2B^2(t)}] = 1$，所±$\int_0^1 E[e^{2B^2(t)}]dt = 1$，即$\int_0^1 E[f^2(B(t))]dt < 1$ ø成立.说明积分的二阶矩ø存在.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 8.2.5 求积分$J = \int_0^1 t dB(t)$的均值与方差.

- $\int_0^1 t^2 dt < \infty$，且$t \in F_t = \{B(s); 0 \le s \le t\}$ · 应的，所 Itô积分$J \in$ ·定的 且其 值 • $E[J] = 0$，方差
- $E[J^2] = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

例 8.2.6 估计使得积分$\int_0^1 (1-t) \quad dB(t)$适定的 的值.

- 只 $\int_0^1 (1-t)^{2} dt < \infty$，上ã Itô积分 ·定，所 只 $< \frac{1}{2}$即可.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

般情况下 朗运动随机积分´ 个随机 量，满足下

ã 5 质．(1) 线 5 5

$$\int_0^T (X(t)+Y(t))dB(t) = \int_0^T X(t)dB(t) + \int_0^T Y(t)dB(t)$$

(2)

$$\int_0^T I_{[a;b]}(t)dB(t) = B(b \wedge T) \quad B(a \vee 0)$$

(3) 零 值 5

$$E[\int_0^T X(t)dB(t)] = 0$$

(4) 等 5 如果 $X\ 2\ V(0;T)$，则

$$E\left(\int_0^T X(t)dB(t)\right)^2 = \int_0^T E[X^2(t)]dt$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

x8.3 Itô积分过程

假 对任 ¢ ê $T > 0$，X 2 V，那 8t T，积分$\int_0^t X(s)dB(s)$ ´ · 定的. • 对任 固定的t，$\int_0^t X(s)dB(s)$ ´ 个随机 量，所 作 • 上限t的函 ê，它定 了 个随机过程$\{Y(t)\}$,其中

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s) \qquad (8.3.1)$$

可 证 ，Itô积分$Y(t)$存在连 Y 的 路 ，即存在 个连 Y 随机过程$\{Z(t)\}$，¦ 得对所有的 t，有$Y(t) = Z(t)$; $a.s.$. 此，从现在起 · 所讨论的积分都假定 ´ 其连 Y 的 路 . 将讨论这 积分过程的各种随机 5 质.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

现在· 可 证 其鞅5质.

定理 8.3.1 设$X(t) 2 V$，并且$\int_0^1 E[X^2(s)]ds < 1$，则

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s); \quad 0 \quad t \quad T$$

是零均值的连续的平方可积鞅(即$\sup_{t \quad T} E[Y^2(t)] < 1$).

证 ：由定 8.2.3后注，可知$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s); 0$ $t \quad T$´ ·定的， 且 有 及二 .如果$fX(t)g$´ 简单过程，则由ª (8.2) 之同 的证 方法可得

$$E \int_s^t X(u)dB(u)jF_s = 0; \quad 8s < t$$

UIBE 1951

GoBack
FullScreen
Close
Quit

于´

$$
\begin{aligned}
E[Y(t) \mid \mathcal{F}_s] &= E\left[\int_0^t X(u)dB(u) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \int_0^s X(u)dB(u) + E\left[\int_s^t X(u)dB(u) \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= \int_0^s X(u)dB(u) = Y(s)
\end{aligned}
$$

所 $\{Y(t)\}$´鞅. 由等 5 可得其二

$$
E\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)^2 = \int_0^t E[X^2(s)]ds
$$

∎

推论 8.3.2 对 意有界的Borel可测 数f(即对 意a 2 $\mathbb{R}$, 有 fx 2 R; $f(x)$ ag 2 $B(R)$), R $^t_0$ $f(B(s))dB(s)$是平方可积鞅.

证 : $X(t) = f(B(t))$ ´ 可 ·应的, 且有常ê K > 0 ¦ 得$jf(x)j$ < K, 于 ´ R $^T_0$ $E[f^2(B(s))]ds$ KT. 由定理8.3.1, 此 题得证. ∎

上ã定理提供了构造鞅的方法. 在8.2 中· 证 , 非随机的简单过程的 Itô积分´正态分 的随机 量. 更 般地, · 有下ã定理.

定理 8.3.3 果X是非随机的，且$\int_0^T X^2(s)ds < \infty$，则$\forall t$, $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ 是正态分布的随机变量.即$\{Y(t); 0 \le t \le T\}$是Gauss过程，其均值 数为零，协方差 数为

$$Cov(Y(t); Y(t+u)) = \int_0^t X^2(s)ds; \quad u \ge 0$$

$\{Y(t)\}$也是平方可积鞅.

证 ： • 积函ê ´ 非随机的，所 $\int_0^t E[X^2(s)]ds = \int_0^t X^2(s)ds < \infty$. 由定理8.3.1 知$Y$ 有零 值，再由积分及$Y(t)$的鞅5质，有

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\int_t^{t+u} X(s)dB(s)\right] \\
= & E\left[E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
= & E\left[\int_0^t X(s)dB(s)E\left[\int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] \\
= & 0
\end{aligned}
$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

此

$$
\begin{aligned}
& Cov(Y(t), Y(t+u)) \\
= & E\left[\int_0^t X(s)dB(s) \int_0^{t+u} X(s)dB(s)\right] \\
= & E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\left(\int_0^t X(s)dB(s) + \int_t^{t+u} X(s)dB(s)\right)\right] \\
= & E\left(\int_0^t X(s)dB(s)\right)^2 \\
= & \int_0^t E[X^2(s)]ds \\
= & \int_0^t X^2(s)ds \qquad (8.3.2)
\end{aligned}
$$

∎

例 8.3.4 根据上述定理可得$J = \int_0^t sdB(s) \sim N(0, \frac{t^3}{3})$.

下　讨论Itô积分的二次　差.

定　8.3.5 设$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s);\ 0\quad t\quad T$是Itô积分，如果在 • 概率收敛的 ¿ Â 下，极限

$$\lim_{n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|Y(t_{i+1}^n)\quad Y(t_i^n)|^2 \tag{8.3.3}$$

当$\{t_i^n\}_{i=0}^n$ H 取$[0;t]$的分割，且其模 $_n=\max_{0\quad i\quad n\quad 1}(t_{i+1}^n\quad t_i^n)\to 0$时存在，则称此极限为$Y$的二次 C 差，记为$[Y;Y](t)$.

定理 8.3.6 设$Y(t)=\int_0^t X(s)dB(s);\ 0\quad t\quad T$是Itô积分，则$Y$的二次变差为

$$[Y;Y](t)=\int_0^t X^2(s)ds \tag{8.3.4}$$

证　：Ä先考虑$fX(s)g$•简单过程的情/，对　般情/，·　可　用简单过程　　的方法得到，所　这里·　只证　$fX(s)g$•简单过程的情/.　　妨假定$X(s)$在$[0;T]$上只取两个　同的值，取任　有限多个值的情/可类似证之.•简单起见，　$T=1$，$X(t)$在$[0;1=2]$上取$_0$，在$(1=2;1]$上取$_1$，即

$$X(t) = {}_0 I_{[0;\frac{1}{2}]}(t) + {}_1 I_{(\frac{1}{2};1]}(t)$$

于´

$$Y(t) = \int_0^t X(s)$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

此，对$[0; t]$的任何分割，有

$$Y(t^n_{i+1}) \quad Y(t^n_i) = \begin{cases} {}_0(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i)); & \text{如果} \quad t^n_i < t^n_{i+1} \quad \frac{1}{2} \\ {}_1(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i)); & \text{如果} \quad \frac{1}{2} \quad t^n_i < t^n_{i+1} \end{cases}$$

当$t \quad \frac{1}{2}$ ž，

$$[Y; Y](t) = \lim \sum_{i=0}^{n\ 1} (Y(t^n_{i+1}) \quad Y(t^n_i))^2$$

$$= {}^2_0 \lim \sum_{i=0}^{n\ 1} (B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2$$

$$= {}^2_0 [B; B](t) = {}^2_0 t = \int_0^t X^2(s) ds$$

当$t > \frac{1}{2}$ž，

$$[Y;Y](t) = \lim \sum_{i=0}^{n\ 1} (Y(t^n_{i+1}) \quad Y(t^n_i))^2$$

$$= {}^2_0 \lim \sum_{t_i < \frac{1}{2}} (B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2 + {}^2_1 \lim \sum_{t_i > \frac{1}{2}} (B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2$$

$$= {}^2_0[B;B](\frac{1}{2}) + {}^2_1[B;B]((\frac{1}{2};t]) = \int_0^t X^2(s)ds$$

这里的极限都´当 $n\ !\ 0$ž在 概率Â敛 下的极限. ∎

GoBack
FullScreen
Close
Quit

对关于同 个Brown运动$\{B(t)\}$的两个 同的Itô积分$Y_1(t) = \int_0^t X_1(s)dB(s)$和 $Y_2(t) = \int_0^t X_2(s)dB(s)$，由于$Y_1(t) + Y_2(t) = \int_0^t (X_1(s) + X_2(s))dB(s)$， · 可 定 Y_1和Y_2的二次 差：

$$[Y_1, Y_2](t) = \frac{1}{2}([Y_1+Y_2, Y_1+Y_2](t) \quad [Y_1, Y_1](t) \quad [Y_2, Y_2](t))$$

由定理8.3.6，有

$$[Y_1, Y_2](t) = \int_0^t X_1(s)X_2(s)ds.$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

x8.4 Itô公 ª

Itô公 ª，随机分 Û 中的 量替换公 ª 或链锁法则，´ 随机分 Û 中的 个主 工 ，N 多重 的公 ª，例如Dynkin公 ª，Feynman-Kac公 ª 及分 积分公 ª，都 ´ 由Itô公 ª 导出的.

• Brown运动在$[0; t]$上的二次 差 • t，即在 概率 Â 敛的 下

$$\lim_{n\,!\,0} \sum_{i=0}^{n\quad 1} (B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2 = t$$

这里$f t^n_i g$ ´ $[0; t]$的分割， $_n = \max_{0\ i\ n\ 1}(t^n_{i+1} \quad t^n_i)$.

证 ：Ä 先取 $^{n}_{i} = B(t_i^n)$，由g的连Y 5和积分的定 ，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \to \int_0^t g(B(s))ds \qquad (8.4.2)$$

· 证

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0 \qquad (8.4.3)$$

在L^2中成立. 记$\Delta B_i = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$，$\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$，则由Brown运动的独立增量 5 和取条件期 " 的方法得到

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)\right]^2 \\
= {} & E\left[E\left(\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 \mid F_{t_i}\right)\right] \\
= {} & E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))E\left(((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 \mid F_{t_i}\right)\right] \\
= {} & 2E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))(\Delta t_i)^2\right] \\
\leq {} & 2\delta_n E\left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))\Delta t_i\right] \to 0; \quad (\text{当 } \delta_n \to 0 \text{ 时})
\end{aligned}
$$

此，在 方Â敛的 下

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \to 0$$

这 ，$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$ 与 $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n)$ 有相同的极限 $\int_0^t g(B(s))ds$.

对任 $\xi_i^n \in (B(t_{i+1}^n); B(t_i^n))$，当 $\delta_n \to 0$ ž，

$$\sum_{i=0}^{n-1} (g(\xi_i^n) - g(B(t_i^n)))(\Delta B_i)^2$$

$$\max_i ((g(\xi_i^n) - g(B(t_i^n))) \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \tag{8.4.4}$$

由g和B的连Y 5，· 有 $\max_i((g(\ {}^n_i)\ \ g(B(t_i^n)))\ !\ 0;\ a{:}s{:}$.

由Brown运动二次 差的定 得 $\sum_{i=0}^{n\ 1}(B(t_{i+1}^n)\ \ B(t_i^n))^2\ !\ t$.

于´当 $_n\ !\ 0$ž， $\sum_{i=0}^{n\ 1}(g(\ {}^n_i)\ \ g(B(t_i^n)))(\Delta B_i)\ .\ \ 10\ \ 21.01\ \ 21.\ \ \mathrm{B}^1)^{.3}$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

现在，· 给出Itô公ª.

定理 8.4.2 果f是二次连续可微 数，则对 何t，有

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds \tag{8.4.5}$$

证 ： 见ª(8.4.5)中的积分都´ ·定的.取$[0;t]$ 的分割$\{t_i^n\}$，有

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1}[f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))]$$

对$f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))$应用Taylor公ª得

GoBack
FullScreen
Close
Quit

$$f(B(t^n_{i+1})) \quad f(B(t^n_i)) = f'(B(t^n_i))(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i)) + \frac{1}{2} f''(\ {}^n_i)(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2$$

其中 ${}^n_i$ 2 $(B(t^n_{i+1}); B(t^n_i))$.于 ´

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n\ 1} f'(B(t^n_i))(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n\ 1} f''(\ {}^n_i)(B(t^n_{i+1}) \quad B(t^n_i))^2 \qquad (8.4.6)$$

令 ^{n} ! 0取极限，则 ª (8.4.6)中的第 个和 Â 斂于Itô积分 $\int_0^t f'(B(s))dB(s)$.利用定理8.4.1可知 ª (8.4.6)中的第二个和 Â 斂于 $\int_0^t f''(B(s))ds$. ∎

GoBack
FullScreen
Close
Quit

ª (8.4.5)称 • Brown运动的Itô公 ª，由此看出，Brown运动的函 ê 可 « • 个Itô积分加上 个 有有 差的 对连 Y 过程. · 称这类过程 • Itô过程，î 格地，· 有 下 定 .

定 8.4.3 如果过程 $fY(t); 0 \quad t \quad Tg$ 可 ± L 示为

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t (s)ds + \int_0^t (s)dB(s); \quad 0 \quad t \quad T \qquad (8.4.7)$$

其中过程 $f \ (t)g$ 和 $f \ (t)g$ 满足

(1) (t) 是适应的 ¿ 且 $\int_0^T j \ (t)jdt < 1; \quad a.s.$

(2) $(t) \ 2 \ V$.

则称 $fY(t)g$ 为**Itô**过程.

有ž· 将Itô过程(8.4.7)记•‡分的/ª

$$dY(t) = (t)dt + (t)dB(t); \quad 0 \quad t \quad T \qquad (8.4.8)$$

其中函ê (t)称•漂 系ê, (t)称•扩散系ê,它 可 赖于$Y(t)$或$B(t)$，$至整个路 $fB(s); s$ tg，(例如 $(t) = \cos(M(t)+t)$，这里 $M(t) = \max_{s \quad t} B(s)$. 类非常重 的情/´ 与 (t) 通过$Y(t)$ 赖于t，在这种情况下，ª(8.4.8)应改 •

$$dY(t) = (Y(t))dt + (Y(t))dB(t); \quad 0 \quad t \quad T \qquad (8.4.9)$$

如果用‡分/ª «，Itô公ª(8.4.5) •

$$d(f(B(t)) = f^{0}(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f^{00}(B(t))dt \qquad (8.4.10)$$

在　融应用中，股票的价格$S(t)$ ´ 用随机 ‡ 分方程$dS(t) = S(t)dt + S(t)dB(t)$ ã 的.如果$a(t)$ « 在 ž 刻t投资者的股票各股 Â ，那 在整个 ž 间区间$[0;T]$内的 Â •

$$\int_0^T a(t)dS(t) = \int_0^T a(t)S(t)dt + \int_0^T a(t)S(t)dB(t)$$

下　定理给出了关于Itô过程的Itô公 ª

定理 8.4.5 设$f X(t) g$是由

$$dX(t) = \ (t)dt + \ (t)dB(t)$$

给出的Itô过程，$g(t;x)$是$[0;\ 1\ )\ \ \ \mathbb{R}$ 的二次连续可微数.则

$$f Y(t) = g(t; X(t)) g$$

为Itô过程，并且

$$\begin{aligned} dY(t) = {} & \frac{@g}{@t}(t; X(t))dt + \frac{@g}{@x}(t; X(t))dX(t) \\ & + \frac{1}{2}\frac{@^2 g}{@x^2}(t; X(t))\ \ (dX(t))^2 \qquad (8.4.11) \end{aligned}$$

其中$(dX(t))^2 = (dX(t))\ \ (dX(t))$按照下面规则计算:

$$dt\ \ dt = dt\ \ dB(t) = dB(t)\ \ dt = 0;\ \ dB(t)\ \ dB(t) = dt$$

即(8.4.11)可以改写为

$$dY(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(t; X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t; X(t)) \quad (t) \right] dt +$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(t; X(t)) \quad (t) dB(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t; X(t)) \quad ^2(t) dt$$

特别地， 果$g(t; x) = g(x)$只是x的 数，(8.4.12)简化为

$$dY(t) = [g'(X(t)) \quad (t) + \frac{1}{2} g''(X(t)) \quad ^2(t)] dt + g'(X(t)) \quad (t) dB(t) \tag{8.4.12}$$

例 8.4.6 短期利率模型（ Vasicek model ）由 下的方程给出

$$dR_t = a(b \quad R_t)dt + \quad dB_t; \quad R_0 = r:$$

利用ITO公式计算$d(R_t e^{at})$，并解出R_t.