



# 应用随机过程

邵彦斌, 邓军

对 济 大

融 院

1/50

$k \leftarrow$   $\rightarrow k$

$\leftarrow$   $\rightarrow$

GoBack

FullScreen

Close

Quit



# 第8章 随机积分

- 8.1 关于随机游动的积分
- 8.2 关于Brown运动的积分
- 8.3 Itô积分过程
- 8.4 Itô公<sup>a</sup>
- 8.5 随机 $\pm$ 分方程
- 8.5 Black-Scholes模.

2/50

$k \leftarrow$   $\rightarrow k$

$\leftarrow$   $\rightarrow$

GoBack

FullScreen

Close

Quit



章的目的 入关于Brown运动的积分，讨论其5  
质 给出在随机分 $\hat{U}$ 及 融 $\mathcal{A}$ 中有着重 应用的Itô公<sup>a</sup> .

## 8.1 关于随机游动的积分

从讨论关于简单的随机游动的积分开 $\odot$ .  $X_1; X_2;$   
独立的随机 量,  $PfX_i = 1g = PfX_i = 1g = \frac{1}{2}$ ,  
令  $S_n$  « 相应的游动

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

3/50

$k \leftarrow$   $\rightarrow k$

$\leftarrow$   $\rightarrow$

GoBack

FullScreen

Close

Quit



可这看这组独立随机量,  $X_n$  第  $n$  次公平赌  
 的果 ( $X_n = 1$  赢1元,  $X_n = -1$  输掉1元).  $F_n =$   
 $(X_1; \dots; X_n)$  (由  $f_{X_i; 1 \leq i \leq n}$  成的代  $\hat{e}$ ), 可  
 理 • 包含  $X_1; \dots; X_n$  的 & 息. 令  $B_n \sim F_{n-1}$  可 的随机  
 量  $S$  列, 如它 « 第  $n$  次赌 之 所下赌注, 则它只能利用  
 第  $n-1$  次及 前的 & 息, 而 能利用第  $n$  次赌 的 果. 于  
 到 之 刻  $n$  的  $\hat{A} Z_n$ .

$$Z_n = \sum_{i=1}^n B_i X_i = \sum_{i=1}^n B_i (S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^n B_i \Delta S_i$$

这里  $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}; S_0 = 0$ . • 称  $Z_n \bullet B_n$  关于  $S_n$  的积  
 分.

Navigation controls:

- ◀ k
- ▶ k
- ◀
- ▶
- GoBack
- FullScreen
- Close
- Quit



容 看出  $fZ_n g'$  关于  $F_n$  的鞅，即对于所有的  $n$

$$E[Z_{n+1} | F_n] = Z_n$$

特 地,  $E[Z_n] = 0$ . 此 , 如果假定  $E[B_n^2] < 1$ , 则

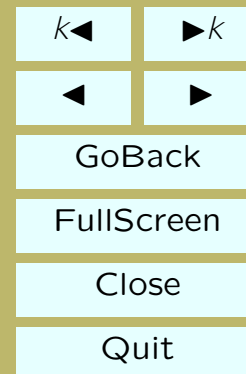
$$Var[Z_n] = E[Z_n^2] = \prod_{i=1}^n E[B_i^2]$$

在  $\mathbb{C}$  上,

$$Z_n^2 = \prod_{i=1}^n B_i^2 X_i^2 + 2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} B_i B_j X_i X_j$$

再注 到  $X_i^2 = 1$ , 如果  $i < j$ , 则  $B_i, X_i, B_j$  都  $F_{j-1}$  可  
的, 且  $X_j$  独立于  $F_{j-1}$ , 得

$$E[B_i B_j X_i X_j] = E[E[B_i B_j X_i X_j | F_{j-1}]] = E[B_i B_j X_i E(X_j)] = 0$$





## 8.2 关于Brown运动的积分

定义 关于Brown运动的积分  $\int_0^T X(t)dB(t)$  (或简记  $\int_0^T XdB$ ), 这里  $fB(t)g$  是标准Brown运动, 有

记  $fW_tg$ . 先考虑一个非随机的简单过程  $fX(t)g$ , 即  $X(t)$  是一个简单函数 (依赖于  $B(t)$ ). 由简单函数的定义, 存在  $[0; T]$  的分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  及常

数  $c_0; c_1; \dots; c_{n-1}$ , 使得

$$X(t) = \begin{cases} c_0; & \text{如果 } t = 0 \\ c_i; & \text{如果 } t_i < t < t_{i+1}; \quad i = 0; 1; \dots; n-1 \end{cases}$$



或

$$X(t) = c_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i; t_{i+1}]}(t) \quad (8.2.1)$$

于，可定其积分。

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i [B(t_{i+1}) - B(t_i)] \quad (8.2.2)$$

由Brown运动的独立增量可知，公式(8.2.2)所定的积分是Gauss分布的随机量，其值为0，方差。

7/50

◀ ▶

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_{dB}) &= E \sum_{i=0}^{N-1} c_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \\
 &= E \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_i c_j [B(t_{i+1}) - B(t_i)][B(t_{j+1}) - B(t_j)] \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_i c_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i)
 \end{aligned}$$

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



用取极限的方法可将这一定推广到一般的非随机函数  $X(t)$ . 但  $\int_0^t X(u) dB(u)$  定义的随机过程的积分, 此将简单函数  $\hat{X}$  中的常数  $c_i$  用随机量  $X_i$  来代替, 求  $\int_0^t X_i dB(u)$  可行的. 这里  $F_t = \sigma\{B(u); 0 \leq u \leq t\}$ . 于是, 由Brown运动的鞅性质得

$$E[X_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)) | F_{t_i}] = X_i E[B(t_{i+1}) - B(t_i) | F_{t_i}] = 0$$

此

$$E[X_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))] = 0:$$

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



**定 8.2.1** 设  $fX(t); 0 \leq t \leq T$  是  $n$  个简单随机过程，即存在  $[0; T]$  的分割  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ，随机变量  $X_i; 0 \leq i \leq n-1$  使得  $X_i$  是常数， $X_i$  依赖于  $fB(t); t \leq t_i$ ，但  $X_i$  依赖于  $fB(t); t > t_i$ ，且

$$X(t) = X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} X_i I_{(t_i; t_{i+1}]}(t) \quad (8.2.3)$$

此时，Itô积分  $\int_0^T X dB$  定义为

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \quad (8.2.4)$$



简单过程的积分 一个随机量，满足下性质.

(1) 线性 如果  $X(t); Y(t)$  简单过程，则

$$\int_0^T (X(t) + Y(t)) dB(t) = \int_0^T X(t) dB(t) + \int_0^T Y(t) dB(t)$$

这里  $\int$  常义.

(2)

$$\int_0^T I_{[a;b]}(t) dB(t) = B(b \wedge T) - B(a \vee 0)$$

其中  $I_{[a;b]}(t)$  区间  $[a;b]$  的示性函数， $b \wedge T := \min(b; T)$ ;  $a \vee 0 := \max(a; 0)$ .

(3) 零值 如果  $E[X_i] = 0$  ( $i = 0; 1; \dots; n-1$ ),

则

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right] = 0$$



(4) 等 5 如果  $E[\frac{\Delta B_i^2}{\Delta t}] < 1 ; (i = 0; 1; \dots ; n - 1)$ ,

则

$$E \int_0^T X(t) dB(t) = \int_0^T E[X^2(t)] dt$$

证 : 5 质(1),(2)和(3) 简单的, 读者可自证之, 这里只证 5 质(4). 利用 Cauchy-Schwarz 等<sup>a</sup>, 得到

$$E[j_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))j_i] \leq \sqrt{E[\frac{\Delta B_i^2}{\Delta t}] E[B(t_{i+1}) - B(t_i)]^2} < 1$$

Navigation controls:

- ◀ k
- ▶ k
- ◀
- ▶
- GoBack
- FullScreen
- Close
- Quit



于

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\int_0^T X dB\right] &= E \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \\ &= E \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 + 2 \sum_{i < j} E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

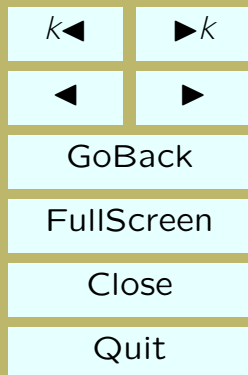
由Brown运动的独立增量及关于  $B(t)$  的假定，利用定理1.5.7(1)，有

$$E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] = 0$$



所，<sup>a</sup> (8.2.5)中的最后项•零.由Brown运动的鞅性质，得

$$\begin{aligned}
 \text{Var}\left[\int_0^T X dB\right] &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\frac{1}{2}(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2\right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[E\left[\frac{1}{2}(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\frac{1}{2}E\left[(B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)\right] \\
 &= \int_0^T E[X^2(t)] dt:
 \end{aligned}$$





ü

有了前 的准 ， 现在可 将上  $\tilde{a}$  随机积分的定  
扩展到更 般的可 应随机过程类.

$g$ 是 )  $(t)$

□( )是

**定 8.2.2** 设  $fX(t); t \geq 0$  是随机

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



将随机积分的定义按下步骤扩展到  $V(0; T)$ :

**Key Point:** 对于  $V(0; T)$  任意的函数  $f$ , 希望找到个简单随机过程  $f_n$  使得二者在平方意义下距离趋于0,

即: 
$$E \left[ \int_0^T (f - f_n)^2 dt \right] \rightarrow 0:$$

**Step 1:** 首先, 令  $h \in V$  有界, 且对每个  $\omega \in \Omega$ ,  $h(\cdot; \omega)$  连续. 则存在简单过程  $f_n$ , 其中

$$f_n = \sum_j h(t_j; \omega) 1_{[t_j; t_{j+1})}(t) \in V$$

得当  $n \rightarrow \infty$  时, 对每个  $\omega \in \Omega$ ,

$$\int_0^T (h - f_n)^2 dt \rightarrow 0$$

此由有界收敛定理得  $E \left[ \int_0^T (h - f_n)^2 dt \right] \rightarrow 0$ .

◀	▶
◀	▶
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



**Step 2:** 其次, 令  $h \in V$  有  $\|h\| < \epsilon$ , 可证存在  $h_n \in V$  有  $\|h - h_n\| < \epsilon$ , 且  $\delta \in \Omega; \delta_n, h_n(\cdot; \omega)$  连续, 可得

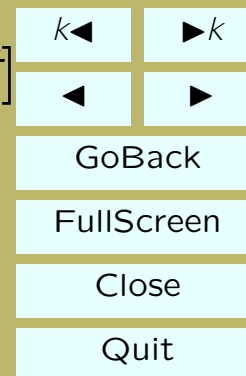
$$E\left[\int_0^T (h - h_n)^2 dt\right] < \epsilon \quad (8.2.6)$$

**Step 3:** 最后, 对任意的  $f \in V$ , 存在有列  $g_n \in V$ , 可得

$$E\left[\int_0^T (f(t; \omega) - g_n(t; \omega))^2 dt\right] < \epsilon \quad (8.2.7)$$

**Step 4:** 对于任意的  $f \in V$ , 能够找到 Step 1-3 中的  $g_n, h_n; n$ , 可得

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T (f(t; \omega) - h_n(t; \omega))^2 dt\right] &= E\left[\int_0^T (f(t; \omega) - g_n(t; \omega))^2 dt\right] \\ &+ E\left[\int_0^T (g_n(t; \omega) - h_n(t; \omega))^2 dt\right] + E\left[\int_0^T (h_n(t; \omega) - g_n(t; \omega))^2 dt\right] \\ &< \epsilon \end{aligned}$$





上 Step 1 - 3 的细 (了 可) -  $\mathbb{C}$  上,  
妨  $\|h_n(t; \omega)\| \leq M; \delta(t; \omega)$ . 定

$$h_n(t; \omega) = \int_0^t \rho_n(s; \omega) h(s; \omega) ds$$

这里  $\rho_n \in \mathbb{R}$  上非负连 Y 函  $\hat{\rho}_n$ , 且得对所有的  $x \in (\frac{1}{n}; 0)$ ,  
 $\rho_n(x) = 0$  且  $\int_{-1}^1 \rho_n(x) dx = 1$ . 则对 个  $\omega \in \Omega$ ,  $h_n(\cdot; \omega)$  连  
Y 且  $\|h_n(t; \omega)\| \leq M$ . 由  $h \in V$  可 看出  $h_n \in V$ , 且

当  $n \rightarrow \infty$  时, 对 个  $\omega \in \Omega$ , 有

$$\int_0^T (h_n(s; \omega) - h(s; \omega))^2 ds \rightarrow 0$$

此再次利用有  $\hat{A}$  敛定理得<sup>a</sup> (8.2.6).

# 上 Step 1 - 3的细



19/50

*k*◀ | ▶*k*

◀ | ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



现在，· 可 成Itô积分  $\int_0^T f(t)dB(t); f \in V$  的定义如下.

**定 8.2.3** 设  $f \in V(0; T)$ , 则  $f$  的Itô积分定  $\hat{A}$  为

$$\int_0^T f(t; \omega)dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T g_n(t; \omega)dB_t(\omega); (L^2(P) \text{ 中极限})$$

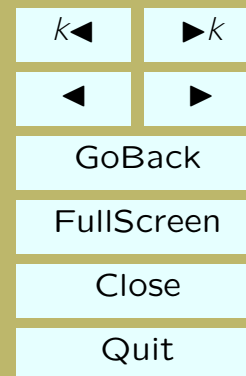
(8.2.8)

这里  $g_n$  是初等随机过程的序列, 使得当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$E \int_0^T (f(t; \omega) - g_n(t; \omega))^2 dt \rightarrow 0; \quad (8.2.9)$$

注: 在实际问题中, · 常常遇到的过程 满足  $V$  中的可积条件而 满足下  $\hat{a}$  的  $V$  中的条件. 上, Itô积分的定义可推广到更广泛的过程  $f \in h(s) : s \in [0, T]$  类:

$V = \{ h : h \in F, \text{ 适应过程, 且满足 } \int_0^T h^2(s)ds < \infty; a.s. : \}$



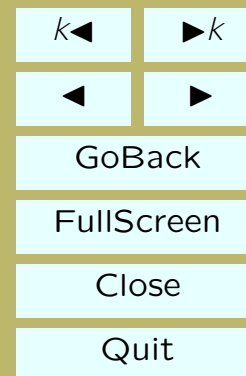


**例 8.2.4** 设  $f$  是连续函数, 考虑  $\int_0^1 f(B(t))dB(t)$ . 若  $B(t)$  有连续的路径, 则  $f(B(t))$  在  $[0; 1]$  上连续, 从而  $\int_0^1 f(B(t))dB(t)$  有定义. 然而根据  $f$  的不同, 这个积分可有(或没有)有限的矩. 例如:

(1) 取  $f(t) = t$ , 则由于  $\int_0^1 E[B^2(t)]dt < 1$ ;  $E[\int_0^1 B(t)dB(t)] = 0$ ; 且由性质 8.2.1(3) (4) 有

$$E \int_0^1 B(t)dB(t) = \int_0^1 E[B^2(t)]dt = \frac{1}{2}$$

(2) 取  $f(t) = e^{t^2}$ , 此时考虑  $\int_0^1 e^{B^2(t)}dB(t)$ . 虽然积分存在, 但由于当  $t = \frac{1}{4}$  时,  $E[e^{2B^2(t)}] = 1$ , 所以  $\int_0^1 E[e^{2B^2(t)}]dt = 1$ , 即  $\int_0^1 E[f^2(B(t))]dt < 1$  不成立. 说明积分的二阶矩不存在.





**例 8.2.5** 求积分  $J = \int_0^1 t dB(t)$  的均值与方差.

- $\int_0^1 t^2 dt < 1$ , 且  $t \in F_t = \mathcal{F}_t$ ;  $0 \leq s \leq t$ .

应的, 所以 Itô 积分  $J$  是确定的且其值为  $E[J] = 0$ , 方差

- $E[J^2] = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ .

**例 8.2.6** 估计使得积分  $\int_0^1 (1-t) dB(t)$  是确定的值.

- 只要  $\int_0^1 (1-t)^2 dt < 1$ , 上述 Itô 积分是确定的, 所以只要  $\int_0^1 (1-t)^2 dt < \frac{1}{2}$  即可.



一般情况下 朗运动随机积分 个随机 量, 满足下

性质. (1) 线性

$$\int_0^T (X(t) + Y(t)) dB(t) = \int_0^T X(t) dB(t) + \int_0^T Y(t) dB(t)$$

(2)

$$\int_0^T I_{[a;b]}(t) dB(t) = B(b \wedge T) - B(a \vee 0)$$

(3) 零 值

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right] = 0$$

(4) 等 如果  $X \in V(0; T)$ , 则

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right]^2 = \int_0^T E[X^2(t)] dt$$

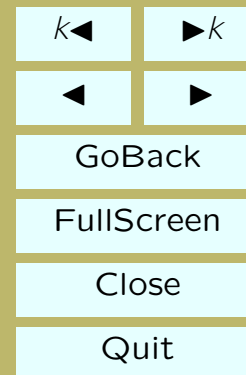


### 8.3 Itô积分过程

假设对任  $\phi \in T > 0, X \in V$ , 那  $\int_0^t X(s)dB(s)$  是确定的. 对任固定的  $t$ ,  $\int_0^t X(s)dB(s)$  是一个随机量, 所作上限  $t$  的函数, 它定义了一个随机过程  $Y(t)$ , 其中

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s) \quad (8.3.1)$$

可证, Itô积分  $Y(t)$  存在连续的路径, 即存在一个连续随机过程  $Z(t)$ , 使得对所有的  $t$ , 有  $Y(t) = Z(t)$ . 从此, 从现在起, 所讨论的积分都假定其连续的路径. 将讨论这积分过程的各种随机性质.





现在. 可证其鞅性质.

**定理 8.3.1** 设  $X(t) \in V$ , 并且  $\int_0^T E[X^2(s)] ds < \infty$ ,

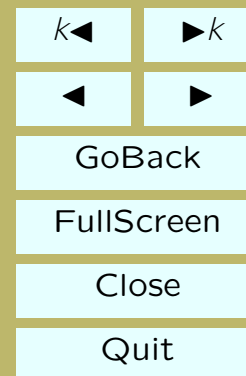
则

$$Y(t) = \int_0^t X(s) dB(s); \quad 0 \leq t \leq T$$

是零均值的连续的平方可积鞅(即  $\sup_{0 \leq t \leq T} E[Y^2(t)] < \infty$ ).

证: 由定 8.2.3 后注, 可知  $Y(t) = \int_0^t X(s) dB(s); 0 \leq t \leq T$ . 定义的, 且有  $Y(0) = 0$  及二阶矩有限. 如果  $f, g$  简单过程, 则由 (8.2) 之同的证法可得

$$E \int_s^t X(u) dB(u) | \mathcal{F}_s = 0; \quad 0 \leq s < t \leq T$$





于

$$\begin{aligned} E[Y(t) | F_s] &= E \int_0^t X(u) dB(u) | F_s \\ &= \int_0^s X(u) dB(u) + E \int_s^t X(u) dB(u) | F_s \\ &= \int_0^s X(u) dB(u) = Y(s) \end{aligned}$$

所  $fY(t)g$  鞅. 由等 5 可得其二

$$E \int_0^t X(s) dB(s) = \int_0^t E[X^2(s)] ds$$

26/50

◀ ▶

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



**推论 8.3.2** 对 意有界的Borel可测 数 $f$ (即对  
 意 $a \in \mathbb{R}$ , 有  $f(x) \in \mathbb{R}; f(x) \in B(\mathbb{R})$ ),  $\int_0^t f(B(s))dB(s)$ 是  
 平方可积鞅.

证 :  $X(t) = \int_0^t f(B(s))dB(s)$  可 的, 且有常 $\hat{e} K >$   
 $0$ ; 得 $|f(x)| < K$ , 于  $\int_0^T E[f^2(B(s))]ds \leq KT$ . 由定  
 理8.3.1, 此 题得证. ■

上 $\tilde{a}$ 定理提供了构造鞅的方法. 在8.2 中. 证  
 , 非随机的简单过程的 Itô积分 正态分 的随机 量.  
 更 般地, 有下 $\tilde{a}$ 定理.



**定理 8.3.3** 果  $X$  是非随机的, 且  $\int_0^T X^2(s) ds < 1$ ,  
则  $Y(t) = \int_0^t X(s) dB(s)$  是正态分布的随机变量. 即  $Y(t); 0 \leq t \leq T$  是 Gauss 过程, 其均值为零, 协方差函数为

$$\text{Cov}(Y(t); Y(t+u)) = \int_0^t X^2(s) ds; \quad u \geq 0$$

$\int_0^t X^2(s) ds$  也是平方可积鞅.



证：• 积函数  $\hat{e}^{\cdot}$  非随机的，所  $\int_0^t E[X^2(s)] ds = \int_0^t X^2(s) ds < 1$  . 由定理8.3.1 知  $Y$  有零值，再由积分及  $Y(t)$  的鞅性质，有

$$\begin{aligned}
 & E \int_0^t X(s) dB(s) \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \\
 = & E E \int_0^t X(s) dB(s) \int_t^{t+u} X(s) dB(s) | F_t \\
 = & E \int_0^t X(s) dB(s) E \int_t^{t+u} X(s) dB(s) | F_t \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	

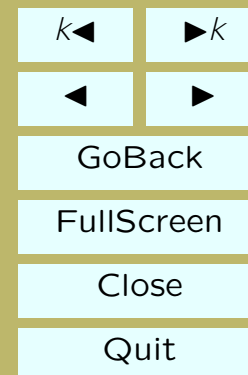


此

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov} \left( \int_t^{t+u} X(s) dB(s), \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \right) \\
 &= E \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \\
 &= E \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \int_t^t X(s) dB(s) + \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \\
 &= E \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \\
 &= \int_t^{t+u} E[X^2(s)] ds \\
 &= \int_0^t X^2(s) ds \qquad (8.3.2)
 \end{aligned}$$

30/50

**例 8.3.4** 根据上述定理可得  $J = \int_0^t s dB(s) \sim N(0; \frac{t^3}{3})$ .





下 讨论Itô积分的二次 差.

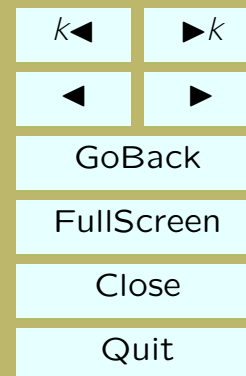
**定 8.3.5** 设  $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s); 0 \leq t \leq T$  是Itô积分, 如果在  $\mathcal{F}_t$  概率收敛的  $\mathcal{A}_t$  下, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \quad (8.3.3)$$

当  $t_i^n, t_{i+1}^n \in \mathcal{H}$  取  $[0; t]$  的分割, 且其模  $\Delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$  时存在, 则称此极限为  $Y$  的二次变差, 记为  $[Y; Y](t)$ .

**定理 8.3.6** 设  $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s); 0 \leq t \leq T$  是Itô积分, 则  $Y$  的二次变差为

$$[Y; Y](t) = \int_0^t X^2(s)ds \quad (8.3.4)$$





证：先考虑  $fX(s)g$  简单过程的情况，对一般情况，可用简单过程的方法得到，所以这里只证  $fX(s)g$  简单过程的情况。妨假定  $X(s)$  在  $[0; T]$  上只取两个不同的值，取任何有限多个值的情况可类似证之。简单起见， $T = 1$ ， $X(t)$  在  $[0; 1/2]$  上取  $x_0$ ，在  $(1/2; 1]$  上取  $x_1$ ，即

$$X(t) = x_0 I_{[0; 1/2]}(t) + x_1 I_{(1/2; 1]}(t)$$

于是

$$Y(t) = \int_0^t X(s) ds$$



此, 对  $[0; t]$  的任何分割, 有

$$Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n) = \begin{cases} B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n); & \text{如果 } t_i^n < t_{i+1}^n \\ B(t_i^n) - B(t_{i+1}^n); & \text{如果 } t_i^n > t_{i+1}^n \end{cases}$$

当  $t \rightarrow 0$  时,

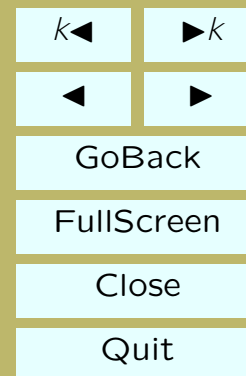
$$\begin{aligned} [Y; Y](t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\ &= \frac{1}{2} [B; B](t) = \frac{1}{2} t = \int_0^t X^2(s) ds \end{aligned}$$



当  $t > \frac{1}{2}$  时，

$$\begin{aligned}
 [Y; Y](t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i < \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i > \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} X^2(s) ds + \int_{\frac{1}{2}}^t X^2(s) ds = \int_0^t X^2(s) ds
 \end{aligned}$$

这里的极限都是当  $n \rightarrow \infty$  时在概率  $\hat{A}$  收敛下的极限。





对关于同一个Brown运动 $fB(t)g$ 的两个不同的Itô积分 $Y_1(t) = \int_0^t X_1(s)dB(s)$ 和 $Y_2(t) = \int_0^t X_2(s)dB(s)$ , 由于 $Y_1(t) + Y_2(t) = \int_0^t (X_1(s) + X_2(s))dB(s)$ , 可定

$Y_1$ 和 $Y_2$ 的二次差:

$$[Y_1; Y_2](t) = \frac{1}{2}([Y_1 + Y_2; Y_1 + Y_2](t) - [Y_1; Y_1](t) - [Y_2; Y_2](t))$$

由定理8.3.6, 有

$$[Y_1; Y_2](t) = \int_0^t X_1(s)X_2(s)ds:$$



## 8.4 Itô公<sup>a</sup>

Itô公<sup>a</sup>，随机分 $\hat{U}$ 中的量替换公<sup>a</sup>或链锁法则，随机分 $\hat{U}$ 中的个主工，N多重 的公<sup>a</sup>，例如Dynkin公<sup>a</sup>，Feynman-Kac公<sup>a</sup>及分 积分公<sup>a</sup>，都 由Itô公<sup>a</sup>导出的。

• Brown运动在 $[0; t]$ 上的二次 差 $\cdot t$ ，即在 概率  $\hat{A}$  敛的 下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 = t$$

这里  $t_i^n$  是  $[0; t]$  的分割， $n = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)$ .





证：先取  $\eta = B(t_i^n)$ ，由  $g$  的连续性和积分的定义，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow \int_0^t g(B(s)) ds \quad (8.4.2)$$

证

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0 \quad (8.4.3)$$

在  $L^2$  中成立。记  $\Delta B_i = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$ ， $\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$ ，则由 Brown 运动的独立增量性和取条件期望的方法得到



$$\begin{aligned}
 & E \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \\
 &= E \sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 jF_{t_i} \\
 &= 2E \sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) (\Delta t_i)^2 \\
 &2_n E \left[ \sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) \Delta t_i \right] \rightarrow 0; \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$



此, 在 方  $\hat{A}$  敛的 下

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \rightarrow 0$$

这  $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$  与  $\int_0^t g(B(s)) ds$  有相同的极限

对任  $\epsilon > 0$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (g(t_i^n) - g(B(t_i^n))) (\Delta B_i)^2$$

$$\max_i (g(t_i^n) - g(B(t_i^n))) \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \rightarrow 0 \quad (8.4.4)$$

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



由  $g$  和  $B$  的连续性, 有  $\max_i (|g(t_i^n) - g(B(t_i^n))|) \rightarrow 0$ ; 又由 Brown 运动二次差的定义得  $\sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \rightarrow t$ .

于是当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{i=0}^{n-1} (g(t_i^n) - g(B(t_i^n)))(\Delta B_i) \rightarrow 0$ .

$k \leftarrow$	$\rightarrow k$
$\leftarrow$	$\rightarrow$
GoBack	
FullScreen	
Close	
Quit	



现在，给出Itô公式。

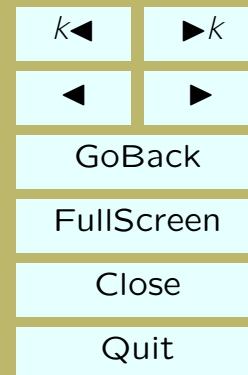
**定理 8.4.2** 若  $f$  是二次连续可微函数，则对任何  $t$ ，有

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds \quad (8.4.5)$$

证：见 (8.4.5) 中的积分都一定的。取  $[0; t]$  的分割  $t_i^n$ ，有

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} [f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))]$$

对  $f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))$  应用 Taylor 公式得





$$f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n)) = f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) + \frac{1}{2} f''(\xi_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$$

其中  $\xi_i^n \in (B(t_i^n), B(t_{i+1}^n))$ . 于是

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \quad (8.4.6)$$

令  $n \rightarrow \infty$  取极限, 则 (8.4.6) 中的第一个和  $\hat{A}$  收敛于 Itô 积分  $\int_0^t f'(B(s)) dB(s)$ . 利用定理 8.4.1 可知 (8.4.6) 中的第二个和  $\hat{A}$  收敛于  $\int_0^t f''(B(s)) ds$ . ■



由 (8.4.5) 称 Brown 运动的 Itô 公式，由此看出，Brown 运动的函数可表示为一个 Itô 积分加上一个有差的对连 Y 过程。称这类过程为 Itô 过程，严格地，有如下定义。

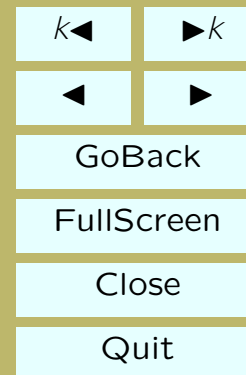
**定义 8.4.3** 如果过程  $f(t)g$  和  $f(t)g$  满足

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t (s)ds + \int_0^t (s)dB(s); \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.7)$$

其中过程  $f(t)g$  和  $f(t)g$  满足

- (1)  $(t)$  是适应的，且  $\int_0^T (t)jdt < 1$ ；
- (2)  $(t) \in V$ 。

则称  $fY(t)g$  为 Itô 过程。





有之. 将Itô过程(8.4.7)记为

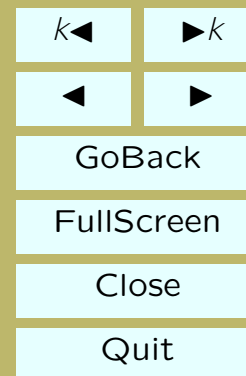
$$dY(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.8)$$

其中函数  $\alpha(t)$  称漂移系数,  $\beta(t)$  称扩散系数, 它们可依赖于  $Y(t)$  或  $B(t)$ , 甚至整个路径  $\{B(s); s \leq t\}$ , (例如  $\alpha(t) = \cos(M(t) + t)$ , 这里  $M(t) = \max_{s \leq t} B(s)$ ). 类非常重要的情形与  $\alpha(t)$  通过  $Y(t)$  依赖于  $t$ , 在这种情况下, (8.4.8) 应改为

$$dY(t) = \alpha(Y(t))dt + \beta(Y(t))dB(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.9)$$

如果用伊藤公式 (8.4.5) 则

$$d(f(B(t))) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt \quad (8.4.10)$$





46/50





在金融应用中，股票的价格  $S(t)$  用随机微分方程  $dS(t) = S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$  描述的。如果  $a(t)$  是在时刻  $t$  投资者的股票头寸  $\hat{A}$ ，那在整个时间区间  $[0; T]$  内的  $\hat{A}$  满足以下方程：

$$\int_0^T a(t) dS(t) = \int_0^T a(t) S(t) dt + \int_0^T a(t) S(t) dB(t)$$

以下定理给出了关于Itô过程的Itô公式<sup>a</sup>



**定理 8.4.5** 设  $fX(t)g$  是由

$$dX(t) = (t)dt + (t)dB(t)$$

给出的Itô过程,  $g(t; x)$  是  $[0; 1) \mathbb{R}$  的二次连续可微数. 则

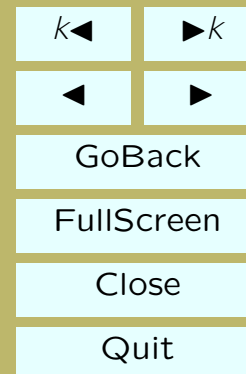
$$fY(t) = g(t; X(t))g$$

为Itô过程, 并且

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t; X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t; X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t; X(t)) (dX(t))^2 \quad (8.4.11)$$

其中  $(dX(t))^2 = (dX(t)) (dX(t))$  按照下面规则计算:

$$dt dt = dt \quad dB(t) = dB(t) \quad dt = 0; \quad dB(t) dB(t) = dt$$



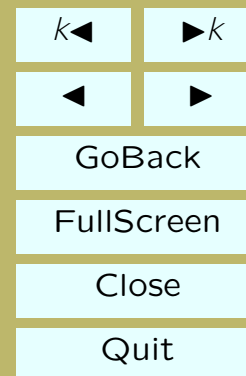


即(8.4.11)可以改写为

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t; X(t)) dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t; X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t; X(t)) dX(t)^2$$

特别地, 如果  $g(t; x) = g(x)$  只是  $x$  的函数, (8.4.12) 简化为

$$dY(t) = [g'(X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} g''(X(t)) dX(t)^2] dt + g'(X(t)) dX(t) \quad (8.4.12)$$





**例 8.4.6** 短期利率模型（ Vasicek model ）由 下  
的方程给出

$$dR_t = a(b - R_t)dt + \sigma dB_t; \quad R_0 = r:$$

利用ITô公式计算 $d(R_t e^{at})$ ，并解出 $R_t$ .

50/50

$k \leftarrow$     $\rightarrow k$

$\leftarrow$     $\rightarrow$

GoBack

FullScreen

Close

Quit