应用‘机过程

Ç ¥星， 邓军

对 经 贸易 学

金融学

GoBack
FullScreen
Close
Quit

第Ê Ù： Poisson过程

- 3.1 Poisson过程
- 3.2 与Poisson过程ƒ联X的若Z分
- 3.3 Poisson过程的推广

t过程（一）

一、 Ž过程与 t过程

3天©，地理，ô理，生ô，通信，医学， Ž机 络，密码学等许多领域，都有关于‘机事 流的 数¯题，如：

- X， 数器上的粒子流；
- Ž机 络上的（图–，声音）流；
- 码（密码）中的ø码流；
- 交通中事故流；
- [胞中染色体的交换 数,· · ·
- 均构成以时 ^序出y的事 流$A_1; A_2; \cdots$

定义 5.0.1 ‘机过程$\{N(t); t \geq 0\}$称•计数过程(Counting process),如果$N(t)$ 示 $[0; t]$ S事件A出现 总次数.

数过程应满足：

(1) $N(t) \geq 0$;

(2) $N(t)$取非 K 整数值;

(3) 如果$s < t$, K $N(s) \leq N(t)$;

(4) 对于$s < t$, $N(t) - N(s)$ 示时 ... $(s; t]$ S 事 出 y 的 数.

一类很重要的 数过程是Poisson过程.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

Poisson过程数学　型

电话呼叫过程：设$N(t) \bullet [0; t)$时　S 到　的呼叫　数，其状态空　•

$$E = \{0; 1; 2; \cdots\}$$

过程有如 e 特点：

- 1) 零初值性：$N(0) = 0$;
- 2) 独立 0 量性：任意两 ‡　 f 重叠的时　… S 到　的呼叫　数 f 互独立;
- 3) 齐　性：3 (s, t)时　S 到　的呼叫　数仅与时　… 长度$t - s$有关，而与起始时　s Ã 关;
- 4) 普通性：3 充分小的时　… S 到　的呼叫　数最多

GoBack
FullScreen
Close
Quit

仅有一 ， 对充分小的Δt,有

$$P\{N(\Delta t)=0\}=P_0(\Delta t)=1- \quad \Delta t+o(\Delta t);$$

$$P\{N(\Delta t)=1\}=P_1(\Delta t)= \quad \Delta t+o(\Delta t);$$

$$P\{N(\Delta t)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(\Delta t)=o(\Delta t);$$

其中 >0.

例 5.0.2 (Poisson过程 ü 论中 应用) ‘ 机服 Ö 系 中 ü 现象 研究中，经常用 Poisson 过程 型，例如， 达 话总机 呼叫数 8， 达，服 Ö 设施 顾客数， 可以用Poisson过程来描述，以，火车 售票处 • 例，设从 上8:00开始，此售票处连续售票，乘客依10人/小时平均 „ 率 达， 从9:00 10:00 1小时 S 最 有5名乘客来此购票 V 率是 少？从10:00-11:00没有人来买票

V率是　少？

·们用一‡Poisson过程来描述. 设8:00•0时刻，　9:00

•1时刻，　数　$=10$. 由Poisson过程　平 - 性知

$$P(N(2)-N(1)\le 5)=\sum_{n=0}^{5}e^{-10\cdot 1}\frac{(10\cdot 1)^n}{n!};$$

$$P(N(3)-N(2)=0)=e^{-10}\cdot\frac{(10)^0}{0!}=e^{-10}:$$

例 5.0.3 (事故发生次数与保险ú i 接　　¢赔数)

若以$N(t)$　示，场¤　$(0;t]$时间S发生　幸事故　数8，

Poisson过程就是$\{N(t);t\ge 0\}$　一种很好近q. 例如，

保险ú i 接　赔偿请求　次数 (设一次事故就　致一次¢

赔)　是可以应用Poisson过程　　型。·们考虑一种最简

单情况，设保险ú i 每次　赔G　是1，每　平均接　¢赔

要求4次，　一c中§要G出　金额平均•　少？

GoBack
FullScreen
Close
Quit

设一c开始•0时刻，1 "•时刻1，2 "•时刻2，$\cdots$，c "•时刻12

$$P(N(12)-N(0)=n)=\frac{(4\times 12)^n}{n!}e^{-4\times 12}.$$

均值

$$E[N(12)-N(0)]=4\times 12=48.$$

•什么实 中有ù么多的y–可以用Poisson过程来反映Q？其Š据是小V率事 理. ·们3 V率论的学S中已经知道，Bernoulli试验中，每 试验成õ的V率很小而试验的 数很多时，二‘分 会 近Poisson分 .ù一Ž法很自然地推广到‘机过程情况. 如上面提到的事故发生的例子，3很短的时 S发生事故的V率是很小的，但 如考虑很多‡ù样很短的时 的连接，事故发生 会有一‡致-定的„率，ù很类q于Bernoulli试验以 二‘分

GoBack
FullScreen
Close
Quit

近Poisson分 时的 定.

定义 5.0.4 设计数过程$\{N(t);t\geq 0\}$满足:

$$\begin{cases}(1)N(0)=0;\\(2)\text{是平 - 立 量过程};\\(3)P\{N(\Delta t)=1\}= \ t+o(\Delta t); \ >0;\\(4)P\{N(\Delta t)\geq 2\}=o(\Delta t):\end{cases}$$

称$\{N(t);t\geq 0\}$是 数(或 „ 率,强度) • 的齐 t 过程.

注 1 事实上，把$[0;t]$划分 • n ‡ 相 时间区间，由 件$(4)'$可知， $n\to\infty$时， 每‡小区间S事件发生两次或两次以上 V率趋于0，因此，事件发生一次 V率 $p\approx \frac{t}{n}$(显然p会很小)，事件 发生 V率 • $1-p\approx 1-\frac{t}{n}$，恰好是一次Bernoulli 试验.其中事件发生一次即 • 试验

GoBack
FullScreen
Close
Quit

成õ， 发生即•失败， 由 件$(2)'$‰出 平- 立 量性，$N(t)$就相 于n次 立Bernoulli 试验中试验成õ 总次数，由Poisson 分 二项分 近可知$N(t)$将服从数• t Poisson分 .

定理 5.0.5 齐次 t 过程$\{N(t); t \geq 0\}$ 时间间…$(t_0; t_0 + t)$ S事件出现n 次 V率•:

$$P\{[N(t_0 + t) - N(t_0)] = n\} = \frac{(\ t)^n}{n!} e^{- \ t}; (n = 0; 1; 2; \cdots)$$

证明:

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\} = P\{[N(t) - N(0)] = n\}$$
$$= P\{N(t_0 + t) - N(t_0) = n\} \quad (1)$$

由条　(2)~(4),得:

$$P_0(t+h) = P\{N(t+h)=0\} = P\{N(t)=0; N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$= P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$$

$$= P_0(t)[1 - \quad h + o(h)]$$

$$\rightarrow \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = - \quad P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

令$h \rightarrow 0$,得
$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t) \\ P_0(0) = 1; \qquad \text{条　（1）} N(0) = 0: \end{cases}$$

解得　$P_0(t) = e^{- \quad t}; t \geq 0:$

2．当$n \geq 1$, Š 据全 V 率 ú 式有

$$P_n(t+h) = P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h)$$

$$P_n(t+h) = (1 - \quad h)P_n(t) + \quad hP_{n-1}(t) + o(h)$$

$$\rightarrow \frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = - \quad P_n(t) + \quad P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

令$h \to 0$,得 $\frac{dP_n(t)}{dt} = -\ P_n(t) + \ P_{n-1}(t)$

两 同乘以$e^{\ t}$后移‘整理得

$$\frac{d[e^{\ t}P_n(t)]}{dt} = \ e^{\ t}P_{n-1}(t); \qquad (2)$$

当$n = 1$, K

$$\begin{cases} \frac{d[e^{\ t}P_1(t)]}{dt} = \ e^{\ t}P_0(t) = \ e^{\ t}e^{-\ t} = \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

解得

$$P_1(t) = \ te^{-\ t}:$$

设 $P_{n-1}(t) = \frac{(\ t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\ t}$ 成立. 入（2）式有

$$\frac{d[e^{\ t}P_n(t)]}{dt} = \ e^{\ t}P_{n-1}(t) = \frac{(\ t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\to \ e^{\ t}P_n(t) = \frac{(\ t)^n}{(n)!} + c$$

利用初始条　$P_n(0) = 0$,可证得

$$P_n(t) = \frac{(\quad t)^n}{(n)!} e^{-\quad t}$$

对一切$n \geq 0$均成立。

定理证明反之亦然，得　 t 过程的等　定义：

定义 5.0.6 设计数过程$\{N(t); t \geq 0\}$满足下述 件：

- (1)$N(0) = 0$;
- (2) $N(t)$是 立 量过程;
- (3) 一切$0 \leq s < t$; $N(t) - N(s) \sim P(\ (t-s))$,即

$$P\{[N(t) - N(s)] = k\} = \frac{(\ (t-s))^k}{k!} e^{-\ (t-s)}$$

$$(k = 0; 1; 2; \cdots)$$

注： 有

$$P\{N(t) = k\} = P\{[N(t) - N(0)] = k\}$$

$$= \frac{(\ t)^k}{k!} e^{-\ t}; (k = 0; 1; 2; \cdots)$$

例 5.0.7 设$\{N(t); t \geq 0\}$是 数 • t 过程，事件A $(0;\ ]$时间区间S出现n次，试求：

$$P\{N(s) = k | N(\ ) = n\};\ 0 < k < n; 0 < s <$$

解：

$$P\{N(s)=k|N(\ )=n\}=\frac{P\{N(s)=k;N(\ )=n\}}{P\{N(\ )=n\}}$$

$$=P\{N(s)=k;N(\ )-N(s)=n-k\}n!e\ \ (\ \ )^{-n}$$

$$=e^{-\ s}\frac{(\ s)^k}{k!}e^{-\ (\ -s)}\frac{[\ (\ \ -s)]^{n-k}}{(n-k)!}n!e^{-}\ \ (\ \ )^{-n}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{s}{})^k(1-\frac{s}{})^{n-k}$$

$$=\binom{k}{n}(\frac{s}{})^k(1-\frac{s}{})^{n-k};k=0;1;2;\cdots;n$$

例 5.0.8 事件A 发生形成强 • Poisson过程 $\{N(t);t\geq 0\}$. 如果每次事件发生时以V率pU够 记录下来， 以$M(t)$ 示 t时刻 记录下来 事件总数， $\{M(t);t\geq 0\}$是一‡强 • p Poisson过程.

事实上，由于每 事 发生时，对§的 录和

录都与其¦的事　U否　　录独立，而且事　发生服　Poisson分　. ¤以 $M(t)$也是具有平 - 独立0量的，故只需验证$M(t)$服　均值• pt的Poisson分　.　对$t>0$，有

$$P(M(t)=m)=\frac{(\ pt)^m}{m!}e^{-\ pt}:$$

由于

$$
\begin{aligned}
&P(M(t)=m)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty} P(M(t)=m|N(t)=m+n)\cdot P(N(t)=m+n)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^{m} p^{m}(1-p)^{n}\cdot\frac{(\;\;t)^{m+n}}{(m+n)!}e^{-\;\;t}\\
&=e^{-\;\;t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\;\;pt)^{m}(\;\;(1-p)t)^{n}}{m!n!}\\
&=e^{-\;\;t}\frac{(\;\;pt)^{m}}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\;\;(1-p)t)^{n}}{n!}\\
&=e^{-\;\;t}\frac{(\;\;pt)^{m}}{m!}e^{\;\;(1-p)t}=e^{-\;\;pt}\frac{(\;\;pt)^{m}}{m!}:
\end{aligned}
$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 5.0.9 若每　　产卵数服从Poisson分　，强
•　，而每‡卵　•成虫　V率•p，且‡卵是否　•成虫
此间没有关系，求每　养活k只小　V率.

解 由上例·们立即知　小　数服从强　•　p　Poisson分
，故¤求V率•

$$\frac{(\ pt)^k}{k!}e^{-\ pt}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

二、齐 t 过程的 ‡结论

1.数字特征

- 因对$\forall t>0; N(t)\sim P(\ t)$
- 均值函数 $m(t)=E\{N(t)\}=\ t$
- 方差函数 $D(t)=\ t$
- 有 $\ =\frac{E\{N(t)\}}{t}$, 是 时 S 事 出 y 的平均 数。
- 协方差函数 $C(s;t)=\ \min(s;t)+\ ^2st:$

证： 因 t 过程$\{N(t);t\geq 0\}$是平 - 独立 0 量过程， 妨设$t>s>0$

$$
\begin{aligned}
R(s;t) &= E\{N(t)N(s)\}=E\{N(s)[N(t)-N(s)+N(s)]\}\\
&= E\{N(s)[N(t)-N(s)]\}+E[N^2(s)]\\
&= E\{N(s)\}E\{N(t)-N(s)\}+E[N^2(s)]\\
&= \ s\times\ (t-s)+[\ s+(\ s)^2]=\ s+\ ^2st
\end{aligned}
$$

$$C(s;t) = R(s;t) - m(s)m(t) = \ s + \ ^2 st - \ s \cdot \ t$$

一般的有

$$C(s;t) = \ \min(s;t)$$

$$R(s;t) = \ \min(s;t) + \ ^2 st:$$

例 5.0.10 设$N_1(t)$和$N_2(t)$分 是强 • $_1$和 $_2$ 相互 立 t过程,

1) 令$X(t) = N_1(t) - N_2(t); t > 0$,求$X(t)$ 均值函数和相关函数。

2) 证明$X(t) = N_1(t) + N_2(t); t > 0$是强 • $_1 + \ _2$ t过程。

3) 证明$X(t) = N_1(t) - N_2(t); t > 0$, 是 t过程。

解：1) $m_X(t) = E[N_1(t)] - E[N_2(t)] = ({}_1 - {}_2)t$

$$R_X(s;t) = E\{[N_1(1) - N_2(s)][N_1(t) - N_2(t)]\}$$

$$= E[N_1(s)N_1(t)] + E[N_2(s)N_2(t)] - E[N_1(s)N_2(t)] - E[N_2(s)N_1(t)]$$

$$= R_{N_1}(s;t) + R_{N_2}(s;t) - E[N_1(s)]E[N_2(t)] - E[N_2(s)]E[N_1(t)]$$

$$= {}_1 \min(s;t) + {}_1^2 st + {}_2 \min(s;t) + {}_2^2 st - 2 {}_1 {}_2 st$$

$$= ({}_1 + {}_2) \min(s;t) + ({}_1^2 + {}_2^2) st - 2 {}_1 {}_2 st:$$

2) Š据 t分 的可 性知

$$X(t) = N_1(t) + N_2(t); t > 0;$$

是强度• $ {}_1 + {}_2$的 t过程。

3) $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$特征函数•

$$' _X(u) = \exp\{ {}_1 te^{iu} + {}_1 te^{-iu} - ({}_1 + {}_2)t\}$$

由分　函数与特征函数的一一对应的·一性定理知$X(t)$　是

　t 过程。

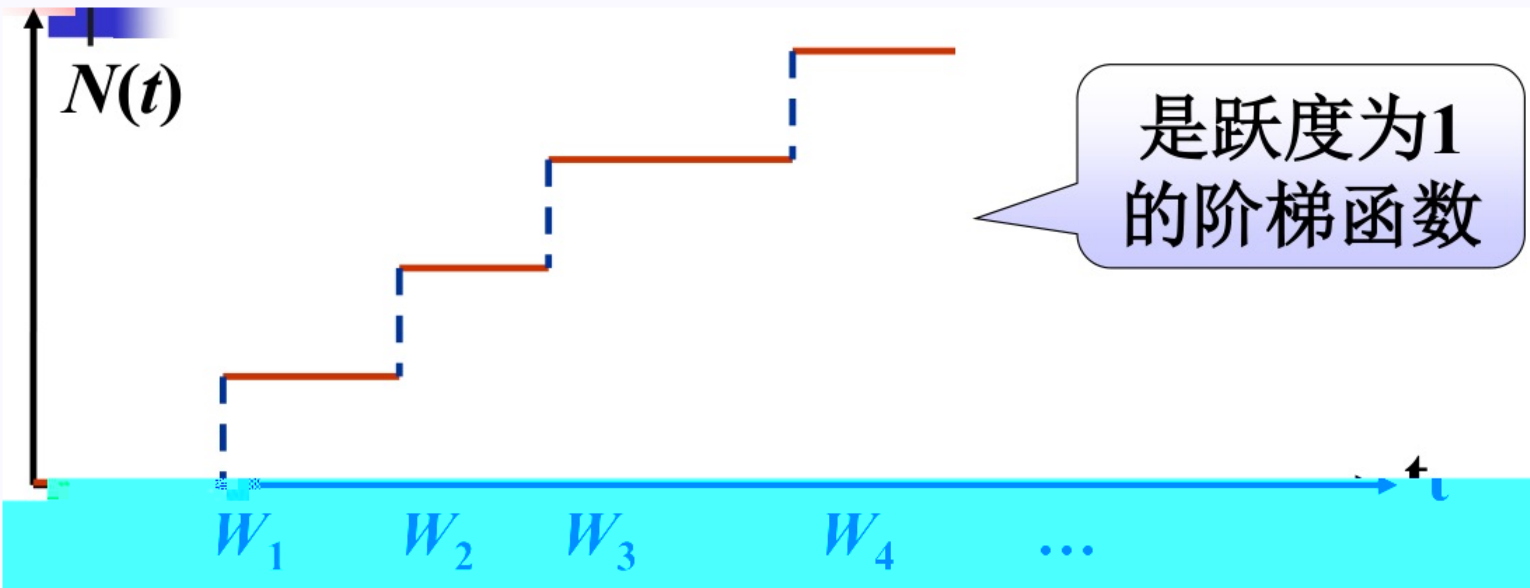
2. 时　　…与等　时　的分

用T_n　示事　A第$n-1$　出 y 与第n　出 y 的时

…。

$W_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$，K　$T_i = W_{i+1} - W_i$

称W_n•事　A第n　出 y 的等　时　（到　时　）。



UIBE 1951

定理 5.0.11 设$\{T_n; n \geq 1\}$是 数• t 过程$\{N(t); t \geq 0\}$ 时间间...序列， $\{T_n; n \geq 1\}$相互 立 服从指数分 ，且$E\{T\} = 1=$

证: (1) 因$\{T_1 > t\} = \{(0; t)$ S 事 A 出 y $\}$

$\to P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{- \quad t}$

$\to F_{T_1}(t) = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{- \quad t}; \quad t \geq 0$

T_1服 均值 • $1=$ 的指数分 。

(2) 由 t 过程的平 - 独立 0 量性，有$P\{T_2 > t|T_1 = s\} =$
$P\{$ 3 $(s; t + s)$ S 事 A 出 y $|T_1 = s\}$

$$= P\{N(t + s) - N(s) = 0\}$$

$$= P\{N(t) - N(0) = 0\}$$

$$= P\{N(t) = 0\} = e^{- \quad t}$$

24 / 100

|◄ ►|
◄ ►
GoBack
FullScreen
Close
Quit

故T_2与T_1 f 互独立，且T_2也服　均值 • 1= 的指数分　。

(3) 对于一般$n > 1$和$t > 0$，以　$r_1; r_2; \cdots ; r_{n-1} > 0$，有

$P\{T_n > t | T_i = r_i; 1 \le i \le n-1\}$

$$= P\{N(t + r_1 +; \cdots ; + r_{n-1}) - N(r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1}) = 0\}$$
$$= P\{N(t) - N(0) = 0\} = e^{- \quad t}:$$

$$F_n(t) = P\{T_n \le t\} = 1 - e^{- \quad t}; t \ge 0.$$

注 2 定理??的结果应该是预　之中的，由于Poisson过程有平稳独立增量，过程在　何时刻都“重新开始” 换言之这恰好就是 “无记忆” 的体现，与指数分布的“无记忆性” 是对应的.

例 5.0.12 假定某天文台观测到的　星　是一个Poisson过程，根据以往资　统计为每小时平均观察到3颗　星.试求：

在　午8点到12点期间，该天文台没有观察到　星的概　.

解　设早晨8时为0时刻，以$N(t)$表示0时到t时观测到的　星数，则$\{N(t)\}$是强度为3的Poisson过程，则有

$$N(4)-N(0)\sim P(3\times 4)$$

故在　午8点到12点期间，该天文台没有观察到　星的概　为

$$P\{N(4)-N(0)=0\}=e^{-12}$$

定理 5.0.13　　数 •　　t 过程$\{N(t); t\geq 0\}$,事件A　n次出现　　待时间服从Γ分　，其V率密　•:

$$f_{W_n}(t)=\begin{cases} e^{-\ t}\frac{t(\ t)^{n-1}}{(n-1)!}; & t\geq 0;\\ 0; & t<0.\end{cases}$$

注：3 ü 队论中称W_n服　爱尔郎分　。

证: 因W_n是事 A第n 出y的等 时 ，故

$$\{W_n \le t\} = \{N(t) \ge n\} = \{(0; t) \text{ S A至少出 y n } \}$$

$$F_{W_n}(t) = P\{W_n \le t\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\quad t)^k}{k!} e^{- \quad t}; t \ge 0$$

$$f_{W_n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\quad t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{- \quad t} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\quad t)^k}{k!} e^{- \quad t};$$

$$= \quad e^{(- \quad t)} \frac{(\quad t)^{(n-1)}}{(n-1)!}; t \ge 0:$$

3. 到 时 的条 分

定理 5.0.14 设$\{N(t); t \geq 0\}$是Poisson过程，已知$(0; t]$时间S A出现n次， n次 达时间$W_1; W_2; \cdots; W_n$联合 件分 密 •

$$f(t_1; t_2; \cdots; t_n | N(t) = n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}; 0 < t_1 < \cdots < t_n; \\ 0; \text{ 其 ¦ }. \end{cases}$$

Proof ·们证明$n = 1$的情况。

$$P(W_1 \leq t_1 | N_t = 1) = P(W_1 \leq t_1; N_t = 1) = P(N_t = 1).$$

$$P(W_1 \leq t_1; N_t = 1) = P(T_1 \leq t_1; T_1 + T_2 > t)$$
$$= \int_0^{t_1} \ e^{- \ x} dx \int_{t-x}^{\infty} \ e^{- \ y} dy = t_1 \ e^{- \ t}:$$

因 ，$P(W_1 \leq t_1 | N_t = 1) = t_1 = t$.

t 过程（二）

三、• 新　数过程

定义 5.0.15　义：设$\{N(t); t \geq 0\}$是一‡计数过程，如果§　时间间…序列$T_1; T_2; \cdots; T_n; \cdots$相互　立　分　，称• •新计数过程.

例 5.0.16　类型设　　•新，如一‡　件；一‡泡；一‡系　⋯假　每‡•换　象　寿命具有相　　V 率密　，　相继两次›坏之间　•新时间$T_1; T_2; \cdots$相互　立　分　.

定理 5.0.17　•新计数过程$\{N(t); t \geq 0\}$是　t 过程　充要　件是时间间…T具有指数分　.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

注：等 于时 ... 序列$T_1; T_2; \cdots ; T_n; \cdots$ f 互独立同服 f 同指数分 .

证明方法一： · 们用Possion过程的定义??来证明。

$$P(N(\Delta t) = 0) = P(T_1 > \Delta t) = e^{- \quad \Delta t} \sim 1 - \quad \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} P(N(\Delta t) = 1) &= P(T_1 < \Delta t; T_1 + T_2 > \Delta t) \\ &= {}^2 \int_0^{\Delta t} \int_{\Delta t - t_1}^{+\infty} e^{- \quad t_1} e^{- \quad t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \Delta t e^{- \quad \Delta t} \sim \quad \Delta t + o(\Delta t): \end{aligned}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

证明方法2（了解）： 由定理知 要性,仅需证充分性,
应有

$$P\{N(t)=k\} = \frac{(\ t)^k}{k!}e^{-\ t}; (k=0;1;2;\cdots;\quad >0)$$

T_i的特征函数•

$$'_{T_i}(\ ) = '_T(u) = \frac{1}{1-\frac{iu}{\ }}; (i=1;2;\cdots)$$

等 时

$$W_k=\Sigma_{i=1}^{k} T_i;$$

且$T_1;T_2;\cdots;T_k\ f$ 互独立，故

$$'_{W_k}(u) = [\,'_T(u)]^k = \frac{1}{[1-\frac{iu}{\ }]^k}; (k=1;2;\cdots)$$

由特征函数的反演ú式 •一性定理知,W_k的密度函数•

GoBack
FullScreen
Close
Quit

$$f_{w_k}(t) = \begin{cases} \frac{(\ )^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\ t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

积分可得

$$F_{w_k}(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\ t)^i}{i!} e^{-\ t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

因

$$\{W_k < t\} = \{N(t) \ge k, t \ge 0\}$$

故

$$\begin{aligned} P\{N(t) = k\} &= P\{N(t) \ge k\} - P\{N(t) \ge k+1\} \\ &= F_{w_k}(t) - F_{w_{k+1}}(t) \\ &= \frac{(\ t)^k}{k!} e^{-\ t}, (k = 0, 1, 2, \cdots, \quad > 0) \end{aligned}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

$\{N(t); t \geq 0\}$的V率分 • t分 , $N(t) \sim P(\ t)$.

一般地，设$\{N(t); t \geq 0\}$• •新 数过程,有:

- 1) 等 时 $W_k = \Sigma_{i=1}^{k} T_i$的特征函数•,

$$'_{W_k}(u) = [\,'_T(u)]^k$$

- 2) 因 $\{W_k < t\} = \{N(t) \geq k\}$,有

$$F_{W_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k)$$

- 3)

$$\begin{aligned} m(t) = E[N(t)] &= \Sigma_{k=0}^{\infty} kP\{N(t) = k\} \\ &= \Sigma_{k=0}^{\infty} k[F_{W_k}(t) - F_{W_{k+1}}(t)] \\ &= \Sigma_{k=1}^{\infty} F_{W_k}(t) \end{aligned}$$

¯题：如何 [一‡ 数• 的Poisson过程$\{N(t); t \geq 0\}$???

提示：

- 1. 结合定理， 查é f 关资料.
- 2. ‰出Ž法 骤， `明Ž法 理.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

例 5.0.18 设　达　影　　观众组成强　•　　Possion流，如果　影从t 时刻开演，计Ž $(0;t]$ S　达　影　　观众　待时间总和　数学期".

解： 设W_k是第k名观众到　时刻，3 $(0;t]$ S 到　的观众数 • $N(t)$, K 总等　时　•

$$\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)$$

Š 据全数学期" ú 式

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)] = E\{E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)|N(t)]\}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

对$\forall n \geq 1;$

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t - W_k)|N(t) = n] = nt - E[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k|N(t) = n]$$

由定理知 $W_1; W_2; \cdots ; W_n$与 $[0; t]$上均！分　f 互独立‘机　量的＾序统　量$U_{(1)}; U_{(2)}; \cdots ; U_{(n)}$有 f 同分　.

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k|N(t) = n]$$

$$= E\left(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} E(U_{(k)}) = \frac{nt}{2}$$

$$\Rightarrow E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t - W_k)|N(t) = n] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}$$

$$\Rightarrow E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)|N(t)] = \frac{t}{2}N(t)$$

$\Rightarrow$

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)] = E\{E[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)|N(t)]\}$$

$$= E[\frac{1}{2}N(t)] = \frac{t^2}{2}$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

o、E合 t过程

例 5.0.19 查城市人 流 情况,可 关键路口观察ú交车 客情况，设$(0;t)$ S 过 ú交车数$N(t)$是一‡poisson过程，而每辆车 客人数• $_n$, 经ú交车过此路口 人数•:

$$X(t)=\sum_{n=1}^{N(t)} {}_n$$

例 5.0.20 若将股票交易次数$N(t)$看作一‡poisson过程，$_n$ 示 n次与 $n-1$次易手前后股票价，差，$X(t)$就代 直 t时刻股票 价， 化.

定义 5.0.21 义：设$\{N(t);t\geq 0\}$是强 • 齐次poisson过程,$\{{}_n;n\geq 1\}$ 是相互 立 分 ‘机 量序列， 与$N(t)$相互 立,称

GoBack
FullScreen
Close
Quit

定理 5.0.22 设$\{X_t; t \geq 0\}$是E合 t 过程

$$X_t = \sum_{n=1}^{N(t)} {}_n; t \geq 0$$

其中$\{N(t); t \geq 0\}$是强 • t 过程, ${}_n; n = 1; 2; \cdots$相互 立与 分 , 有:

- 1) 的特征函数 • ' (u), K $X(t)$的特征函数 •

$$'_{X_t}(u) = e^{t[' (u)-1]}; t \geq 0$$

- 2)均值函数

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[N(t)]E( ) = tE( )$$

.

- 3)方差函数

$$D_X(t) = E(N)E( ) = tE(^2):$$

证明 P_{92}.

例 5.0.23 设顾客以每分钟6 的平均„ 进 某场，这一过程可以用Poisson过程来描述.又设进 该 场的每位顾客 东西的概 为0.9，且每位顾客是否 东西互不影响，也与进 该 场的顾客数无关，求一天(12小时)在该 场 东西的顾客数的分布与均值.

解 以$N_1(t)$表示在时间$(0; t]$内进 该 场的顾客数，则$\{N_1(t); t \geq 0\}$是„ 为 $= 6($ $/$分钟$)$的Poisson过程.再以$N_2(t)$表示在时间$(0; t]$内在该 场 东西的顾客数，并设

$$Y_i = \begin{cases} 1; & \text{果第}i\text{位顾客在该 场 东西} \\ 0; & \text{果第}i\text{位顾客在该 场未 东西} \end{cases}$$

则Y_i独立同分布于$B(1; 0.9)$，与$\{N_1(t); t \geq 0\}$独立，且

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

易知

$$N_2(t) \sim P(5.4t)$$

即 $\{N_2(t); t \geq 0\}$是 „ 为 $= 5.4($ /分钟)的Poisson过程，$t=$12小时$=$720分钟，则

$$N_2(720) \sim P(3888)$$

即一天(12小时)在该 场 东西的平均顾客数为$E[N_2(720)] = 3888$.

注：若以Z_i 示进入 T 商场的第i 顾客 3 T 商场 ¤ 花

GoBack FullScreen Close Quit

的钱数(　　:　)，且有$Z_i \sim B(200; 0{:}5)$， K

$$N_3(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$$

示 3 时　$(0; t]$ S T 商场的营业额， K T 商场一天的平均营业额 •

$$E[N_3] = E[Z_1]E[N_1] = (200\times 0{:}5)\times(6\times 12\times 60) = 432000$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

Ê、非齐 t 过程(了解 S 容， 考察)

当Poisson过程的强度 2 是常数，而与时 t有关时，Poisson过程 推广 • 非齐 Poisson过程.一般来 ` ,非齐 Poisson过程是 具 平 - 0 量的. 3 实 中，非齐 Poisson过程也是 较常用的.例如 3 考虑设 的故 æ 率时，由于设 使用 c • 的 化，出故 æ 的可 U 性会 ‘ 之 化；放射性 Ô 质的 P „ 度，会因 ˆ 种 条 的 化而 ‘ 之 同；昆虫产卵的平均数量 ‘ c 龄和 节而 化等. 3 ù 样的情况 e， 2 用齐 Poisson过程来描述就 合适了，于是 U 用非齐 的Poisson过程来 理.

定义 5.0.24 如果计数过程满足下列 件:

- 1. $N(0) = 0$;
- 2. $\{N(t); t \geq 0\}$是一 ‡ 立 量过程;

UIBE 1951

GoBack
FullScreen
Close
Quit

UIBE
1951