应用随机过

Ç ¥星， 邓军

对 经济 易大学

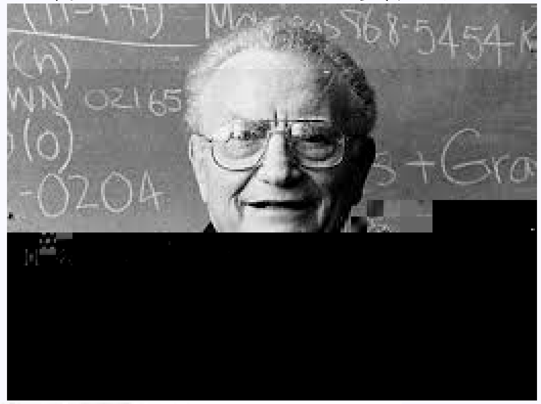
金融学院

Ç ¥星：办公室： 学楼902，邮箱：wxwu@uibe.edu.cn

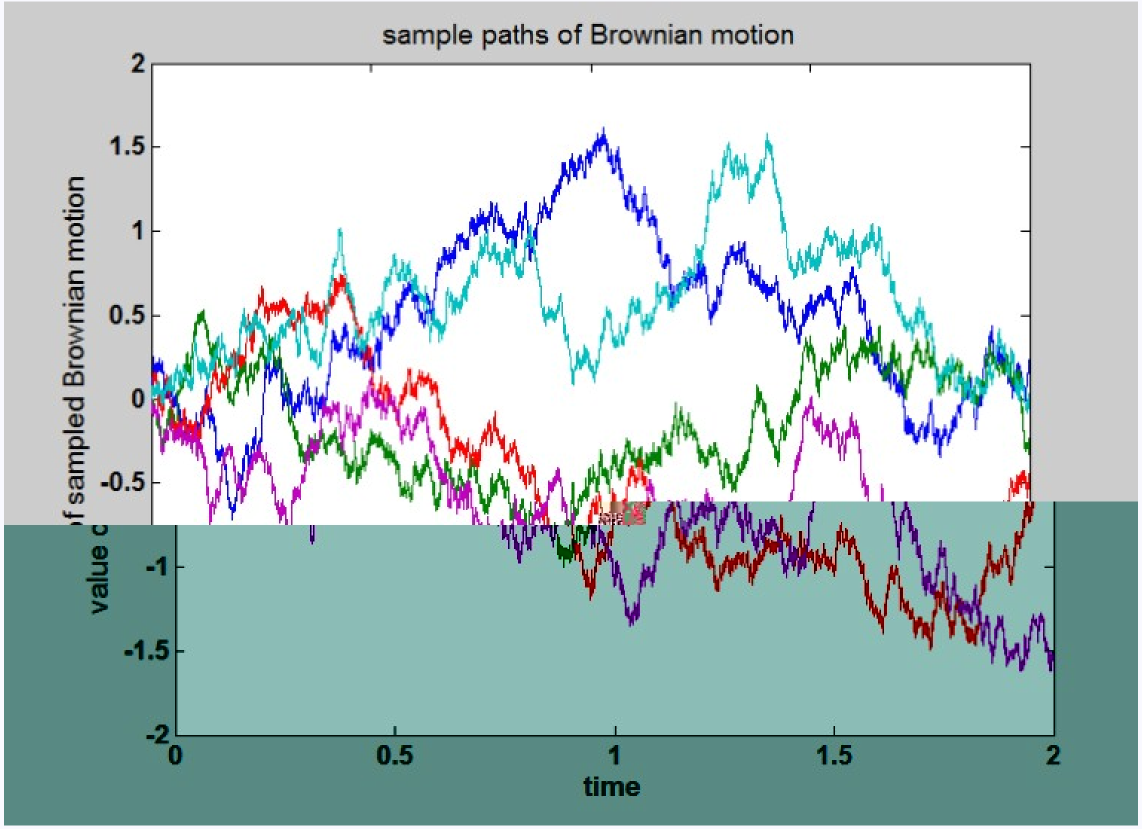
邓军：办公室： 学楼703，邮箱：jundeng@uibe.edu.cn

Brown 运动进入金融的历史

Paul Samuelson



Louis Bachelier


sample paths of Brownian motion
value of sampled Brownian motion
time
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2

$\sqrt{t}$!!!

§4.1 基 概念与性质

· 从讨论简单的随机游动开始.设有一个粒子在直线上随机游动，在 个单 时间内等可能地向左或向右移动一个单 的 度. 现在加速这个过 ，在越来越小的时间间隔中走越来越小的 子. 若能以正确的方式趋于极限，· 就得到Brown运动. 详细地说就是令此过 隔 t时间等概率地向左或向右移动 x的距离. 如果以X

GoBack
FullScreen
Close
Quit

且假设诸ξ_i相互独立

$$P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

由于$E[\xi_i] = 0, Var[\xi_i] = E[\xi_i^2] = 1$及(4.1.1)，· 有

$$E[X(t)] = 0,\ Var[X(t)] = (\ \ x)^2[t/\ \ t].$$

现在要令 x和 t趋于零， 使得极限有意义.

- 如果取 $x = \ \ t$，令 $t \to 0$，则$Var[X(t)] \to 0$，从而$X(t) = 0, a.s.$.
- 如果取 $t = (\ \ x)^3$，则$Var[X(t)] \to \infty$，这是 合理的. 因•粒子的运动是连续的， 可能在很短时间内远离 发点.
- 因此，· 作下 的假设：令 $x = \sigma\sqrt{\ \ t}$， σ•某个正 数，从上 的讨论可见，当 $t \to 0$时，$E[X(t)] = 0, Var[X(t)] \to \sigma^2 t$.

下　来看这一极限过　的一些直观性质.由式(4.1.1)及中心极限定理可得:

(1)$X(t)$服从均值•0,方出•$\sigma^2 t$的正态分　.

此　，由于随机游动的值在　相重叠的时间区间中的　化是独立的，所以有

(2)$\{X(t), t \geq 0\}$有独立增量.

又因•随机游动在任一时间区间中的　置　化的分　只依赖于区间的　度，可见

(3)$\{X(t), t \geq 0\}$有平 - 增量.

下 · 就给 Brown运动的严格定义.

定义 4.1.1 随机 程$\{X(t), t \geq 0\}$如 满足:

(1) $X(0) = 0$;

(2) $\{X(t), t \geq 0\}$有平稳独立增量;

(3) 对每个$t > 0$, $X(t)$服从正态分布$N(0, \sigma^2 t)$.

则称$\{X(t), t \geq 0\}$为**Brown**运动, • 称为**Wiener** 程. 常记为$\{B(t), t \geq 0\}$ 或 $\{W(t), t \geq 0\}$.

如果$\sigma = 1$, · 之• 准Brown运动, 如果$\sigma \neq 1$, 则可考虑$\{X(t)/\sigma, t \geq 0\}$, 它是 准Brown运动.故 失一般性, 可以只考虑 准Brown运动的情形.

由于这一定义在应用中 是十分方 , · 加证 地给 下 的性质作•Brown运动的等价定义, 其证 可以在许多随机过 的著作中找到.

性质7.1.1 Brown运动是具有下述性质的随机过 $\{B(t), t \geq 0\}$.

(1) (正态增量)$B(t)-B(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$，即$B(t)-B(s)$服从均值 • 0,方出 • $\sigma^2(t-s)$的正态分 . 当$s=0$时，$B(t)-B(0) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

(2) (独立增量)$B(t)-B(s)$独立于过 的过去

(4.1.2)式按照下　的定义**??**　• Brown运动的**空间齐次性**.此性质也说　，$B^x(t)$和$x + B^0(t)$是相同的，·　只需研究始于0的 Brown运动就可以了，如　加说　，Brown运动就是始于0的Brown运动.

三、‘纳过 的分

- ‘分 ：$B(t)\sim N(0,\sigma^2 * t)$;
- 增量分 ：$B(t)-B(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$; 设$t>s$,因$B(0)=0$,且$B(t)$是平-独立增量过 ，故 $B(t)-B(s)=B(t-s+s)-B(s)$ 与 $B(t-s)-B(0)=B(t-s)$ 相同分 $N(0,\sigma^2(t-s))$.

引理 4.1.2 维纳过程´正态过程.

Proof 设‘纳过 $\{B(t),t\geq 0\}$的 数是σ^2, 任取n及$t_1<t_2<\cdots<t_n$,

$$X_k=B(t_k)-B(t_{k-1}),t_0=0,k=1,2,\cdots,n$$

则 $X_k\sim N(0,\sigma^2(t_k-t_{k-1}))$，且相互独立，有

$$B(t_k)=X_1+X_2+\cdots+X_k$$

$$\to \begin{pmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,0 \\ \vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots\,\vdots \\ 1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

正态随机向量的线性　换服从正态分　.

四、‘纳过　的数字特征

- $E\{B(t)\} = 0$;
- $R_B(s,t) := E(B(s)B(t)) = \sigma^2 min(s,t)$

例 4.1.3　$\{B(t), t \geq 0\}$ ´ 参 ê 为σ^2 的维纳过程，求下列过程的均值函 ê 和相关函 ê 。

- $X(t) = B^2(t), t \geq 0$;
- $X(t) = tB(1/t), t > 0$

Proof　1)

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[B^2]$$
$$= D[B(t)] + \{E[B(t)]\}^2 = \sigma^2 t.$$

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = E[B^2(s)B^2(t)] \\
&= E\{B^2(s)[B(t)-B(s)+B(s)]^2\} \ (s<t) \\
&= E\{B^2(s)[B(t)-B(s)]^2\} + E[B^4(s)] \\
&\quad +2E\{B^3(s)[B(t)-B(s)]\} \\
&= E[B^2(s)]E\{[B(t)-B(s)]^2\} + E[B^4(s)] \\
&= \sigma^2 S\sigma^2(t-s) + 3\sigma^4 s^2 = \sigma^4(st+2s^2)
\end{aligned}
$$

故

$$R_X(s,t) = \sigma^4(st + 2min^2(s,t))$$

其中因 $B(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$;

$$B(t) - B(s) \sim N(0, \sigma^2|t-s|)$$

另因: 若$X \sim N(0,\sigma^2)$,有

$$E(X^n) = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \cdots; \\ \sigma^n (n-1)(n-3)\cdots 1, & n = 2, 4, 6, \cdots. \end{cases}$$

2)

$$m_X(t) = E[X(t)] = tE\left[B\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 0, t > 0$$

$$R_X(s,t) = E\left[sB\left(\frac{1}{s}\right) * tB\left(\frac{1}{t}\right)\right] = stE\left[B(\frac{1}{s})B(\frac{1}{t})\right]$$

$$= st\sigma^2 min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \sigma^2 min(s,t).$$

下　给　关于Brwon运动的概率计算的例子.

例 4.1.4　$\{B(t), t \geq 0\}$　标准Brown运动，计算 $P\{B(2) \leq 0\}$　$P\{B(t) \leq 0, t = 0, 1, 2\}$.

解　由于$B(2) \sim N(0, 2)$，所以$P\{B(2) \leq 0\} = \frac{1}{2}$.因•$B(0) = 0$，所以$P\{B(t) \leq 0, t = 0, 1, 2\} = P\{B(t) \leq 0, t = 1, 2\} = P\{B(1) \leq 0, B(2) \leq 0\}$. 虽然$B(1)$和$B(2)$是独立的，但由性质7.1.1(2)和(3)可知$B(2)-B(1)$与$B(1)$是相互独立的　准正态分　随机　量，于是利用分解式

$$B(2) = B(1) + (B(2) - B(1))$$

·　有

$$
\begin{aligned}
& P\{B(1) \le 0, B(2) \le 0\} \\
= & P\{B(1) \le 0, B(1) + (B(2) - B(1)) \le 0\} \\
= & P\{B(1) \le 0, B(2) - B(1) \le -B(1)\} \\
= & \int_{-\infty}^{0} P\{B(2) - B(1) \le -x\}\phi(x)dx \\
= & \int_{-\infty}^{0} \quad (-x)d \quad (x)
\end{aligned}
$$

这里 和ϕ分 示 准正态分 的分 函数和 度函数.由积分 量替换公式得

$$
\int_0^{\infty} \quad (x)\phi(-x)dx = \int_0^{\infty} \quad (x)d \quad (x) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} ydy = \frac{3}{8}
$$

下　是**Brown**运动的路径性质.

从时刻0到时刻T对Brown运动的一次观乘　• Brown运动在区间$[0,T]$上的一个**路径**或一个**实现**. Brown运动的几乎所有样　路径$B(t), 0 \le t \le T$都具有下述性质：

(1) 是t的连续函数；

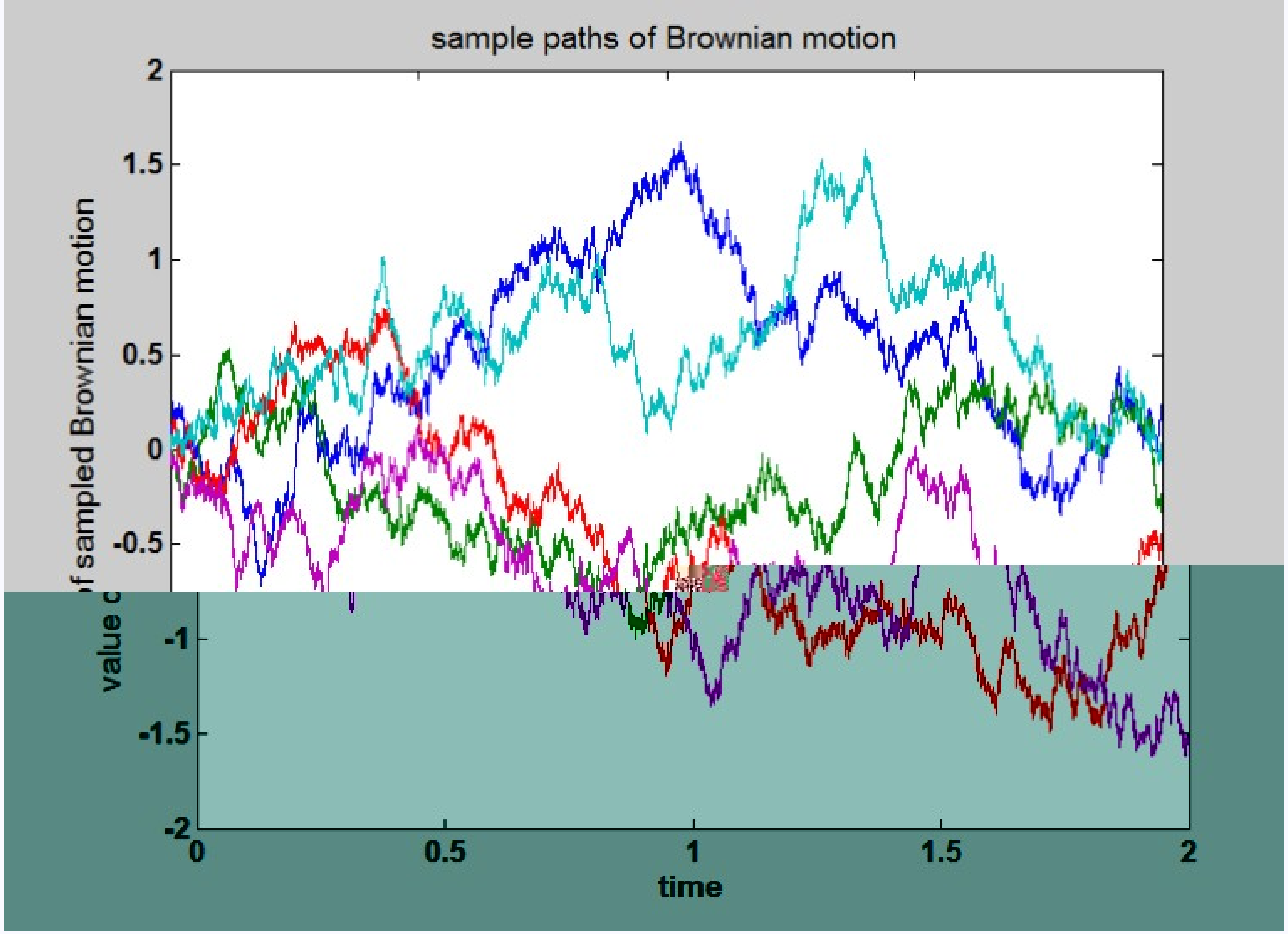
(2) 在任意区间(Ã论区间多　小)上都　是单调的;

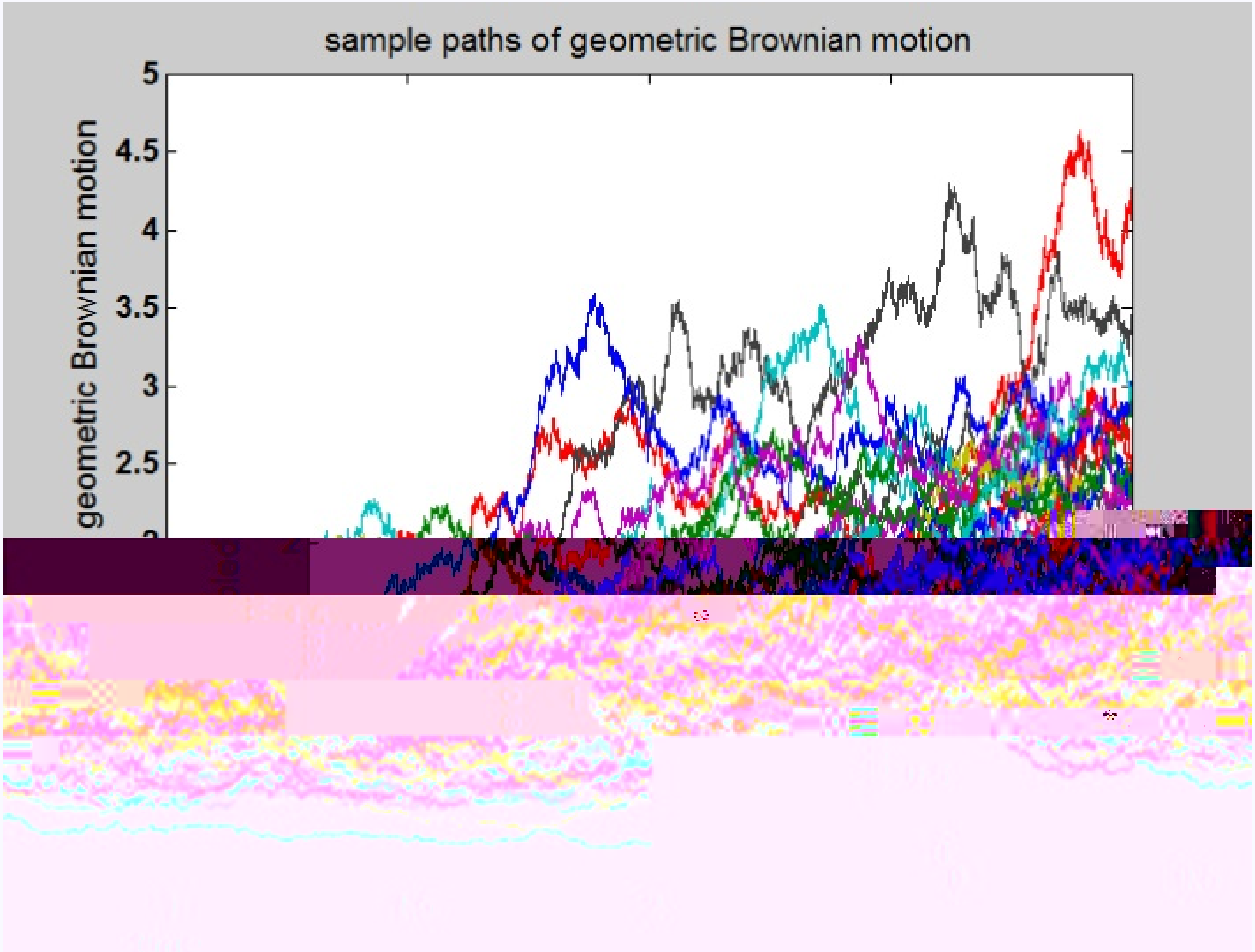
(3) 在任意点都　是可‡的；

(4) 在任意区间(Ã论区间多　小)上都是Ã限　出的;

(5) 对任意t，在$[0,t]$上的二次　出等于t.

上述性质(1)~(3)　难理解，(4)可以从(5)得到(留作习题).


sample paths of Brownian motion
value of sampled Brownian motion
time
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2


sample paths of geometric Brownian motion
geometric Brownian motion
5
4.5
4
3.5
3
2.5

• 了讨论Brown运动的路径性质，首先给　二次　出的定义.

定义 4.1.5 Brown运动的二次变差$[B,B](t)$ 定 Â 为当$\{t_i^n\}_{i=0}^n$遍取$[0,t]$的分割，且其模$\delta_n = \max_{0\le i\le n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$　，• 概率　敛 ¿ Â 下的极限

$$[B,B](t) := \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)|^2 \qquad (4.1.3)$$

定理 4.1.6 $[B,B](t) = \sigma^2 t$.

证　：取区间$[0,t]$的分割$\{t_i^n\}_{i=0}^n$使得$\sum_n \delta_n < \infty$.记

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} [B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)]^2$$

则

$$E[S_n] = \sum_{i=0}^{n-1} E[B(t^n_{i+1}) - B(t^n_i)]^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n-1} (t^n_{i+1} - t^n_i) = \sigma^2 t.$$

再由　准正态分　的四阶矩公式，得

$$\begin{aligned} Var[S_n] &= Var[\sum_{i=0}^{n-1} (B(t^n_{i+1}) - B(t^n_i))^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} Var[(B(t^n_{i+1}) - B(t^n_i))^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2\sigma^4 (t^n_{i+1} - t^n_i)^2 \le 2\sigma^4 \max(t^n_{i+1} - t^n_i) t = 2\sigma^4 t \delta_n \\ &\to 0\,. \end{aligned}$$

于是有$S_n - t \to 0$, $a.s.$，故$[B, B](t) = \sigma^2 t.$ ∎

例 4.1.7 $\{B(t)\}$ Brown运动，求$B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$的分布.

解：考虑随机向量$\mathbf{X}=(B(1),B(2),B(3),B(4))'$，则$\mathbf{X}$服从多元正态分 ，且具有零均值和协方出矩阵

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

令$\mathbf{A}=(1,1,1,1)$，则

$\mathbf{AX}=X_1+X_2+X_3+X_4=B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$

具有均值•零，方出•$\mathbf{A\Sigma A}'=30$的正态分 .于是$B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$是服从均值•0,方出•30的正态分 .

GoBack FullScreen Close Quit

例 4.1.8 求$B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$的分布.

解：考虑随机向量$Y=(B(\frac{1}{4}),B(\frac{1}{2}),B(\frac{3}{4}),B(1))'$. 易见， Y与上例中的X具有相同的情形. 所以它的协方出矩阵 • $\frac{1}{4}$. 因此 $AY=B(\frac{1}{4})+B(\frac{1}{2})+B(\frac{3}{4})+B(1)$ 服从均值 • 0,方出 • $\frac{30}{4}$的正态分 .

GoBack

FullScreen

Close

Quit

例 4.1.9 求概率$P\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\}$.

解：首先需要指 的是，Brown运动具有连续路径，所以对 个路径来说，Riemann积分$\int_0^1 B(t)dt$ 存在. · 只需找 $\int_0^1 B(t)dt$的分 .由Riemann积分的定义，· 可以从 近和$\sum B(t_i)$ t_i 的极限分 得到. 这里t_i是[0, 1]的分点， $t_i = t_{i+1} - t_i$. 例如取$t_i = \frac{i}{n}$，当$n = 4$时， 近和即 • 上例中的随机 量.一般地，类似地证 ，所有 近和的分 都是零均值的正态分 ，因此它 的极限分 是正态分 .于是$\int_0^1 B(t)dt$也是零均值的正态分 .下 来计算$\int_0^1 B(t)dt$的方出.

GoBack
FullScreen
Close
Quit

$$
\begin{aligned}
Var\left[\int_0^1 B(t)dt\right] &= Cov\left[\int_0^1 B(t)dt, \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= E\left[\int_0^1 B(t)dt \int_0^1 B(s)ds\right] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 Cov[B(t)B(s)]dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \min(t,s)dtds = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

这样，$\int_0^1 B(t)dt \sim N(0, \frac{1}{3})$. 于是所求概率•

$$
P\left\{\int_0^1 B(t)dt > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} = P\left\{\sqrt{3}\int_0^1 B(t)dt > 2\right\} = 1- \qquad (2)
$$

这里 (x)是 准正态分 的分 函数.

§4.2 Brown运动的鞅性质

节讨论与Brown运动相联系的几个鞅，首先回忆连续鞅的定义. 随机过 $\{X(t), t \geq 0\}$ • 鞅，如果$\forall t$, $E[|X(t)|] < \infty$,且$\forall s > 0$,有

$$E[X(t+s)|\mathcal{F}_t] = X(t), \quad a.s. \qquad (4.2.1)$$

这里$\mathcal{F}_t = \sigma\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$是由$\{X(u), 0 \leq u \leq t\}$生的$\sigma$代数，其中的等式(4.2.1)是几乎 然 立的，在后 有关的证 中，有时也省略$a.s.$

定理 4.2.1 $\{B(t)\}$ ´ 标准Brown运动，则

(1)$\{B(t)\}$ ´ 鞅;

(2)$\{B(t)^2 - t\}$ ´ 鞅;

(3)对任意 ¢ ê u, $\exp\{uB(t) - \frac{u^2}{2}t\}$ ´ 鞅.

证　：首先，由$B(t+s) - B(t)$与$\mathcal{F}_t$的独立性可知对任意可　函数$g(x)$，有

$$E[g(B(t+s)-B(t))|\mathcal{F}_t] = E[g(B(t+s)-B(t))] \quad (4.2.2)$$

由Brown运动的定义, $B(t) \sim N(0,t)$, 所以$B(t)$可积, 且$E[B(t)] = 0$, 再由其他性质得

$$\begin{aligned} E[B(t+s)|\mathcal{F}_t] &= E[B(t) + (B(t+s) - B(t))|\mathcal{F}_t] \\ &= E[B(t)|\mathcal{F}_t] + E[B(t+s) - B(t)|\mathcal{F}_t] \\ &= B(t) + E[B(t+s) - B(t)] = B(t) \end{aligned}$$

从而(1)得证.

由于$E[B^2(t)]=t<\infty$，所以$B^2(t)$可积.于是得到

$$B^2(t+s)=[B(t)+B(t+s)-B(t)]^2$$
$$=B^2(t)+2B(t)[B(t+s)-B(t)]+[B(t+s)-B(t)]^2$$

$$E[B^2(t+s)|\mathcal{F}_t]$$
$$=B^2(t)+2E[B(t)(B(t+s)-B(t))|\mathcal{F}_t]+E[(B(t+s)-B(t))^2|\mathcal{F}_t]$$
$$=B^2(t)+s \quad (4.2.3)$$

这里· 利用了$B(t+s)-B(t)$与$\mathcal{F}_t$的独立性且具有均值0， 对$g(x)=x^2$应用式(4.2.2).在式 (4.2.3)两端同时减去$(t+s)$，则(2)得证.

考虑$B(t)\sim N(0,t)$的矩母函数$E[e^{uB(t)}]=e^{tu^2/2}<\infty$，这蕴含着 $e^{uB(t)}$是可积的，　且

$$E[e^{uB(t)-\frac{u^2}{2}t}]=1$$

取$g(x)=e^{ux}$，利用式(4.2.2)，可得

$$\begin{aligned}
E\left[e^{uB(t+s)}|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[e^{uB(t)+u(B(t+s)-B(t))}|\mathcal{F}_t\right]\\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}|\mathcal{F}_t\right]\\
&= e^{uB(t)}E\left[e^{u(B(t+s)-B(t))}\right]\\
&= e^{uB(t)}e^{\frac{u^2}{2}s}
\end{aligned}$$

两端同时　以$e^{-\frac{u^2}{2}(t+s)}$,则(3)得证.

注： 上述定理所给的这3个鞅在理论上也有着十分重要的意义， 如鞅$\{B^2(t)-t\}$就是 Brown运动的特征，即，如果连续鞅$\{X(t)\}$使得$\{X^2(t)-t\}$也是鞅，则$\{X(t)\}$是Brown运动.

§4.3 Brown运动的最大值 量及反正弦律

以T_x记 准Brown运动首次击中x的时刻，即

$$T_x = \inf\{t > 0, B(t) = x\}$$

当$x > 0$时，• 计算$P\{T_x \le t\}$，· 考虑$P\{B(t) \ge x\}$. 由全概率公式

$$P\{B(t) \ge x\} = P\{B(t) \ge x | T_x \le t\} P\{T_x \le t\} + P\{B(t) \ge x | T_x > t\} P\{T_x > t\} \quad (4.3.1)$$

若$T_x \le t$，则$B(t)$在$[0, t]$中的某个时刻击中x，由对 性得

$$P\{B(t) \ge x | T_x \le t\} = \frac{1}{2}$$

再由连续性可知，$B(t)$ 可能还™击中x就大于x，所以(4.3.1)中第2项•零.因此

$$P\{T_x \le t\} = 2P\{B(t) \ge x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_x^\infty e^{-u^2/2t}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{x/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2}dy \quad (4.3.2)$$

由此可见

$$P\{T_x < \infty\} = \lim_{t\to\infty} P\{T_x \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2/2}dy = 1$$

对分　函数求导数可得其分　　度

$$f_{T_x}(u) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}}, & \text{如果 } u > 0 \\ 0, & \text{如果 } u \leq 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

利用式(4.3.2)，可以得到

$$
\begin{aligned}
E[T_x] &= \int_0^\infty P\{T_x > t\}dt \\
&= \int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2}dy\right) dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-y^2/2}dydt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2/2}dy \int_0^{x^2/y^2} dt \\
&= \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} e^{-y^2/2}dy \\
&\geq \frac{2x^2e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{y^2}dy \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

因此，T_x虽然几乎 然是有限的，但有Ã穷的期".直观地看，就是Brown运动以概率1 会击中x，但它的平均时间是Ã穷的.性质$P\{T_x < \infty\} = 1$ •Brown运动的 返性. 由于始于点a的Brown运动与$\{a + B(t)\}$是相同的，这里$\{B(t)\}$是始于0的Brown运动，所以

$$P_a\{T_x < \infty\} = P_0\{T_{x-a} < \infty\} = 1$$

即Brown运动从任意点 发，击中x的概率都是1.

当$x < 0$时，由对 性，T_x与T_{-x}有相同的分 .于是有

$$P\{T_x \le t\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

$$f_{T_x}(u) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2u}}, & u > 0 \\ 0, & u \le 0 \end{cases} \qquad (4.3.4)$$

另一个有趣的随机　量是Brown运动在$[0,t]$中达到的最大值 $M(t) = \max_{0\le s\le t} B(s)$的分　可由下述等式得到，对$x>0$有

$$
\begin{aligned}
P\{M(t)\ge x\} &= P\{T_x \le t\} \\
&= 2P\{B(t)\ge x\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2/2}dy
\end{aligned}
$$

读者　难得到Brown运动在$[0,t]$中达到的最小值$m(t) = \min_{0\le s\le t}\{B(s)\}$的分　.

§4.4 Brown运动的几种 化

§4.4.1 Brown桥

由Brown运动, · 可以定义另一类在数理金融中经用到的过 ——Brown桥过 .

定义 4.4.1 $\{B(t), t \geq 0\}$ 标准Brown运动.令

$$B^*(t) = B(t) - tB(1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

则称随机 程$\{B^*(t), 0 \leq t \leq 1\}$为Brown桥(Brown Bridge).

因•Brown运动是Gauss过 ，所以Brown桥也是Gauss过 ，其n‘分 由均值函数和方出函数 全确定. 且$\forall 0 \le s \le t \le 1$，有

$$E[B^*(t)] = 0$$

$E[B^*($

GoBack
FullScreen
Close
Quit

§4.4.2 几何Brown运动

由$X(t) = e^{B(t)}$, $t \geq 0$ 定义的过 $\{X(t), t \geq 0\}$ • 几何Brown运动.由于Brown运动的矩母函数 • $E[e^{sB(t)}] = e^{ts^2/2}$，所以几何Brown运动的均值函数与方出函数分 •

$$E[X(t)] = E[e^{B(t)}] = e^{t/2}$$

$$\begin{aligned} Var[X(t)] &= E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 \\ &= E[e^{2B(t)}] - e^t \\ &= e^{2t} - e^t \end{aligned}$$

在金融市 中，人 经 假定股票的价格按照几何Brown运动 化，在下 的例子中 · 如此假定.

例 4.4.2 (票期权的价值) 某人拥有某种 票的交割 刻为T，交割价格为K的欧 看涨期权，即他(她)具有在 刻T ± 定的价格K 买 ˜ 这种 票的权力.假这种 票目前的价格为y，并按照几 Brown运动变化，我们计算拥有这个期权的平均价值. $X(T)$表 刻T的 票价格，若$X(T)$高于K ，期权将被 ，Ï 此该期权在 刻T的平均价值应为

$$
\begin{aligned}
E[\max(X(T)-K,0)] &= \int_0^\infty P\{X(T)-K>u\}du \\
&= \int_0^\infty P\{ye^{B(T)}-K>u\}du \\
&= \int_0^\infty P\{B(T)>\log\frac{K+u}{y}\}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_0^\infty \int_{\log[(K+u)/y]}^\infty e^{-x^2/2T}dxdu
\end{aligned}
$$